1183　球面微分 $\frac{1}{2}$ ナル函數ニ就キテ

春木　　博

今、$f(z)$ ヲ $|z| \leqq 1$ デ一價正則ナル函数トシ、且ツ $|z|=1$ 上ノ任意ノ点 $z=z_0$ ニ於ケル球面微分 $\frac{|f'(z_0)|}{1+|f(z_0)|^2}$ ガ常ニ、$\frac{1}{2}$ ナリトスル。更ニ $f(z)$ ニ條件 $f(1)=1$, $f(-1)=-1$ ナル條件ヲツケル。

此時 $f(z)$ ハ如何ナル函数トナルカ？

結果ハカヽル函数ハ $f(z)=z$, $f(z)=\frac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}$ $\left(\begin{smallmatrix}|\alpha|>1 \\ \alpha\text{ハ実数}\end{smallmatrix}\right)$ ナル二ツノ函数ニ限ル。以下ニ之ヲ証明シヨウ。

(証明) 今 $f(1)\,(=1)$, $f(-1)\,(=-1)$ ノ w 平面上ノ像点ヲ夫々 A（1ヲアラハス）, B（−1ヲアラハス）トシ, Riemann 球面上ノ像点ヲ夫々 A^*, B^* トシ, 更ニ z 平面上ノ半円 $z=e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ ノ w 平面上ノ像曲線ヲ $\mathfrak{C}$, 又 Riemann 球面上ノ像曲線ヲ K トスル。

次ニ $\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,d\theta$ ナル積分ヲ考ヘレバ（但シ $z=e^{i\theta}$）

假定ニヨリ $\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,d\theta = \frac{1}{2}\pi$ $(z=e^{i\theta})$

然ルニ $\int_0^\pi \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\,d\theta$ ハ Riemann 球面上

A^*（複素数1ヲアラハス）, B^*（複素数 −1ヲアラハス）

ヲ結ブ曲線ノ長サ $l(K)$ ヲ与ヘル。

シカモ K ハ球面上直径ノ両端 A^*, B^* ヲ結ブ曲線デア

ルカラ

$$K ノ長サ = l(K) \geqq \frac{1}{2}\pi$$

等号が成立スルノハ大円ノ半分ノ弧即チ半円ノ時ニ限ルカラKハ実ハ半円ナルコトガ判ツタ。従ツテ又、CハA，Bヲ通ル円ノ弧トナル。（必ズシモ半円トハナラナイ）

今度ハZ平面上実軸ノ下ノ半円，$Z = e^{i\theta}\ (\pi \leqq \theta \leqq 2\pi)$ノ$f(z)$ニヨル Riemann 球面上及ビ$W$平面上ノ写像曲線ヲ考ヘレバ同様ニシテ、夫々半円，円ノ弧トナル。假定ヲ使ヘバ $|Z| = 1$ 上デハ $f'(z) \neq 0$ ナルコトガ判ルカラ、結局 $|Z| = 1$ ノ $f(z)$ ニヨル Riemann 球面上ノ写像曲線ハ大円トナリ、両ハ一対一ニ対應スル。

従ツテ又、$f(z)$ ニヨル $|Z| = 1$ ノ W平面上ノ写像曲線ハ，A，B ヲ通ル円デアル。併シ之ハ必ズシモ単位円デハナイ。

単位円デナイ時ハ之ヲ単位円ニスルタメ、αヲ$|\alpha| > 1$ナル適当ナ実数トスルトキ．Riemann球面ノ廻轉$\frac{1-i\alpha z}{z-i\alpha}$ヲ行ヘバ単位円ニナホル。

次ニ議論ヲ二ツノ場合ニ別ケテ、進メヨウ。

（第一ノ場合） $f(z)$ ニヨル $|Z| = 1$ ノ W平面上ノ像曲線が始メカラ単位円ナルトキ

此ノ時ハ結局 $f(z) = Z$ トナル。

（第二ノ場合） $f(z)$ ニヨル $|Z| = 1$ ノ W平面ヘノ像曲線が単位円デナイトキ。

此ノ時ハ変換 $g(z)=\dfrac{1-i\alpha f(z)}{f(z)-i\alpha}$ ($|\alpha|>1$ αハ実数)

ニ依リ $|z|=1$ ノ $g(z)$ ニヨル w平面上ノ像曲線ハ単位円トナル。

α ノ定メ方カラ容易ニ判ルヤウニ、$f(z)-i\alpha \neq 0$ ナル故 $g(z)$ハ勿論 $|z|\leqq 1$ デ正則デ、シカモ $|z|=1$ ナルトキハ $|g(z)|=1$ デアル。

之ヨリ結局 $g(z)=z$

即チ $f(z)=\dfrac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}$ (αハ $|\alpha|>1$ ナル実数)

勿論之ハ与ヘラレタ條件ニ満足スルカラ

結局求ムル函数ハ

$$z,\ \frac{1+i\alpha z}{z+i\alpha}\quad (\alpha ハ |\alpha|>1 ナル実数)$$

ノ二ツニ限ルコトガ判ツタ。

―(完)―