1191. 束雑論

船山子之助 (陸軍幼年學校)

束ノ構造上ノ問題ニツキ氣ノツイタコトヲアレコレ考ヘル、組織立ツテハヰナイ。

1. 半順序集合ノ上ノ congruence relation ト構造

半順序集合ノ上ノ congruence relation ハドウ考ヘタラヨイカ。束或ハ一般ニ abstract algebra ノ上ノ congruence relation トハソノ元ノ分割デ operation ノ preserve セラルヽモノデアル。然ルニコノ考ヘヲ半順序集合ノ上ニ持チ来タストキハウマクユカヌ。ソレ故 congruence relation ノ分割ガ homomorphisms ノ原像ガ、作ル分割デアルコトヲ利用シテ考ヘル。

半順序集合 P ヨリ他半順序集合 P' ヘ homomorphism トハ $a \to a'$ ナル対應デ $a \geqq b$ ナルトキ $a' \geqq b'$ ノ成立スルコトヽスル。ソコデ P' ノ元トシテ $a' \geqq b'$ ナルトキソノ原像ノ中ノ element ノ間ニ新シク $a \geqq b(\theta)$ ナル関係ヲ導入スレバ (θ) ニヨル関係 $\geqq$ デ P ハ P' ト同型ナル半順序集合ヲ作ル。即チ P ノ上ノ congruence relation トシテ P' 元ノ分割デナク單ニ $\geqq$ ナル関係ノ増加ヲ意味スル。

定義1. 半順序集合Pノ上ノ congruence relation θトハP'元ニ対スル関係$\geqq(\theta)$ノ導入デ次ノ関係ヲ満足スルモノトス。

i. Pノ元トシテ $a \geqq b$ナラバ $a \geqq b(\theta)$

ii. $\geqq(\theta)$ナル関係ハ半順序集合ノ條件ヲ満足スル、即チ(イ) $a \geqq a(\theta)$　(ロ) $a \geqq b(\theta)$　$b \geqq c(\theta)$ナラバ $a \geqq c(\theta)$　[(ハ) $a \geqq b(\theta)$　$a \geqq b(\theta)$ナラバ $a \sim b$]

congruence relation トシテハ(ハ)ヲ付サナイ

(ハ)ヲ付セバ homomorphic image P'ガ得ラレル。

束又ハ abstract algebra ノ時ト異ル点ハ必ラズシモPノ元ノ分割ニナラヌ点デアル。

定義2. Pノ上ノ congruence relation θ_1 θ_2ニ対シテ$\theta_1 \geqq \theta_2$ヲ定義スル。

$a \geqq b(\theta_1)$ ヨリ $a \geqq b(\theta_2)$ ガ得ラレルトキ

$\theta_1 \geqq \theta_2$ ト定義ス。

最大ノ congruence relation I ハPノ元トシテノ元通リノ$\geqq$ノミ，最小ハスベテノ元ノ間ニ$\geqq$ナル関係ヲ付ケル。

congruence relation

カヽル congruence relation ハ partition デナイカラ congruence relation 全体ヲ上ノ如ク order ヲ付スルトキ束ニナルガドウカワカラナイガ次ノヤウニナル。

定理1. 半順序集合Pノ上ノ congmence relation 全体ハ定義2ノ order ニヨリ（完備ナ）束ヲ作ル。

証. $\{\theta\alpha\}$ ヲ任意個数ノPノ上ノ congmence relation ノ集合トス。スベテノ α ニツキ $a \geqq b(\theta\alpha)$ ノトキ $a \geqq b(\smile\theta\alpha)$ トスレバ $\smile\theta\alpha$ ハヤハリPノ上ノ congmence relation デ $\{\theta\alpha\}$ ノ結ビニナル。半順序集合デ最小限ヲ有シ且無制限ニ結ビガ存在スル故完備束ヲ作ル。$\frown\theta\alpha$ ヲ posititirely ニ定義出来ルガソレハ省略スル。Pノ上ノ congmence-relation ノ作ル束ヲ P^* ト記ス units ヲ夫々 $\bar{I}^*$, O^*,

定理2. Pノ subdirect decomposition ト P^* ノ unit $\bar{I}^*$ ノ結ビ分解トハ一対一ニ対応スル。

証明 $P=P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_n$ ヲPノ subdirect decomposition トスル。$a=(a_1, a_2, \cdots a_n)$ ト表ハサルヽトキ $a \to a_1$ ハ homomorphism デPノ上ニ congrnense relation θ_1 ヲヒキ起ス。$\theta_1 \smile \theta_2 \smile \cdots \smile \theta_n = \bar{I}^*$ ナルコトハ自明デアラウ。逆ニ $\{\theta i\}$ ヲ結ビガ $\bar{I}^*$ トスル P^* ノ元トスレバPノ θ_1 ニヨル homomorphic image ヲ P_1 トスレバ $P=P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots\cdots \otimes P_n$ ナル subdirect decomposition ヲ生ズ。

コノ定理ハ束ニ於ケル同様ノ定理ニ相当スルガ congruence relation ノ意味ガ異ナル。

定理2′(Birkhoff 束論 p.52 定理 3.20)

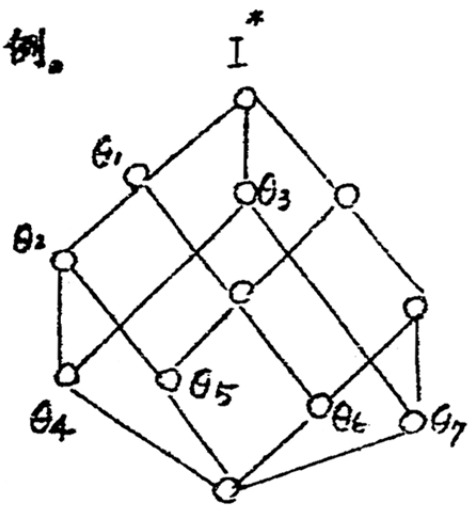
束Lノ subdirect decomposition ト $\theta_1 \smile \theta_2 \cdots \cdots \smile \theta_n = I^*$ ナル分解ハ1対1ニ対應スル。

コノ定理カラ束Lノ subdirect decomposition ノ uniqueness ハ L^* ガ分配束ナルコトヨリ直チニ得ラレル(262号中山先生ノ direct decomposition ノ所論参考)

定理3′ 束Lノ subdirect decomposition ハ unique デアル。

半順序集合ノ場合ハドウナルカ? subdirect decomposition ノ unique トナラヌコトハ P^*. ノ構造ヨリ知ラルル。

例.



P ヲ $a > b$ 及ビ c トスレバ $\left(\begin{array}{cc} a & \\ | & c \\ b & \end{array}\right)$ P^* ハ左図ノ如クナル。各 congruence relation ニヨル homomorphic image ハ Q(θ_1 ニヨル homomorphic image) ハ $\begin{array}{c} a \\ b \quad c \end{array}$ $R(\theta_2) = \begin{array}{c} a \\ | \\ b \\ | \\ c \end{array}$ $S(\theta_4) = \begin{array}{c} (a,b) \\ | \\ c \end{array}$, $T(\theta_3) = (a,b).\ c$

コノ例ヨリワカル様ニ P^* ハ模束ニハナラヌ。又 I^*

$= \theta_4 \smile \theta_5 \smile \theta_7 = \theta_4 \smile \theta_6 \smile \theta_7$ ナルコトヨリ sub-direct decomposition ハ unique デナイ。

猶 trivial ナ congruence relation 以外有シナイ半順序集合ハ $\begin{smallmatrix} I \\ | \\ 0 \end{smallmatrix}$ ナルモノニ限リ其ノ他ノモノニ於テハ I^* ハ結ビ分解ガ可能デアル、即チ P^* ニ於テ結ビニツキ既約ナモノハ point ニ限ル。

定理3. 半順序集合ハ二元ノ束ノ direct decomposition ノ部分積トシテ表現セラレル。

－續ク－