1193

連續函數環ニツイテ

吉 澤 尚 明 (阪大学生)

(9月25日受付)

以下ニ、極ク簡單ナコトデアリマスガ、連續函數ノ擴張ニ関スル一ツノ問題ニ就イテ報告致シマス、尚、コレハ、目下角谷静夫先生ニ指導シテ頂イテ居リマス　セミナリー　ニ於テ証明シタコトデアリマスガ、本文ニ関シマシテモ、種々御指導ヲ受ケマシタ。

1.　Ωヲ *bicompact Hausdorff space* トスル時、Ωデ定義サレタ複素数値連續函数 $x(\omega)$ ノ全体ハ、*norme* ヲ $\|x\| = \max_{\omega\in\Omega} |x(\omega)|$ ト定義スルコトニヨリ、ノルム環ヲ作ル。コレヲ$C(\Omega)$デ表ハス。今，FヲΩノ閉集合トスル時、Fノ上デ連續ナ函数ハ、*Urysohn* ノ擴張定理ニヨツテ、Ωノ上ヘ連續ニ擴張スルコトガ出来ル。即チ，$x_F\in C(F)$ニ対シテ、Fノ上デ　$x_F(\omega) \equiv x_\Omega(\omega)$　トナル如キ $x_\Omega \in C(\Omega)$ガ存在スル。(勿論，$C(F)$ハFノ上ノ複素数値連續函数全体ノ作ルノルム環デアル。$\|x\| = \max_{\omega\in F} |x(\omega)|$ ト定義スル)　此ノ場合、FガΩノ真部分集合ナラバ、一ツノ $x_F(\omega)$ ノ擴張 $x_\Omega(\omega)$ ハ唯一ツデハナイガ、任意ニ一ツヲ選ブコトニヨツテ$C(F)$ カラ $C(\Omega)$ノ中ヘノ一意写像 φガ定義サレル。　此ノφトシテ、*linear, multiplicative* 且 *isometric* ナルモノ

ガ存在スルタメニハ、Fガ（Borsuk ノ意味デ）Ω ノ retract デアル．即チ、スベテノ $\omega\in\Omega$ ニ対シテ $f(\omega)\in F$、$\omega\in F$ ナラバ $f(\omega)=\omega$ ナル、Ω カラ F ノ上ヘノ連続写像 f ガ存在スル）コトガ主要且充分デアルコトヲ証明スルノガ、本文ノ目的デアル。コヽニ任意ノ $x, y\in C(F)$ ニ対シテ、

(1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,

且 任意ノ複素数 α ニ対シテ、

$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$$

ナル時．φ ヲ linear,

(2) $\varphi(xy)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

ナル時、φ ヲ multiplicative,

(3) $\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_\Omega=\|x-y\|_F$

ナル時、φ ヲ isometric トイフ。

2．定理1ヲ補助定理トシテ用キル。

$\boxed{\text{定理}}$ 1（Šilov）．R ヲ $C(\Omega)$ ノ，単位元ヲ含ム closed subring デ 次ノ條件ヲ満スモノトスル．

(※) 任意ノ $x(\omega)\in R$ ニ対シテ $\overline{x(\omega)}$ ガ R ニ属スル。但シ $\overline{x(\omega)}$ ハ $x(\omega)$ ノ共軛複素数ヲ示ス。然ラバ、R ハ Ω ノ或連続像 Ω' ニ関スル $C(\Omega')$ ト equivalent デアル。（isomorphic 且 isometric ヲ equivalent ト言フコトニスル。）

逆ニ、Ω' ガ Ω ノ連続像ナラバ，$C(\Omega')$ ハ、條件（※）ヲ満ス、$C(\Omega)$ ノ或ル closed subring R ト equivalent デアル。

証明ノ要点 ハ、Rノ一ツノ maximal ideal ニハ Ωノ一点ガ又Ω ノ一点ニハ、Rノ maximal ideal ガ少クトモ一ツ対應スルコトカラ、Rノ maximal ideal ノ全体ニ weak topology ヲ入レタモノΩ'ガ、Ωノ連続像ニナルコトデアル。シカラバ、Rハ$C(\Omega')$ト equivalent ニアル。定理ノ后半ハ明ラカデアル。

$\boxed{\text{定理}}$2 Ω, Ω'ヲ bicompact Hausdorff spaces トスル。$C(\Omega')$ト equivalent ナル、$C(\Omega)$ノ部分環R（Rガ$C(\Omega)$ノ単位元ヲ含ムコトハ仮定シナイ）ガ存在スルタメノ必要且充分ナル條件ハ、Ω'ガΩノ連続像デアルコトデアル。

証明。 充分ナルコトハ、定理1ノ后半ソノモノデアルカラ、必要ナルコトヲ証明スル。

(1') $C(\Omega')$ノ単位元e'ニ対應スルRノ元$e(\omega)$ハ、$e'^2=e'$ナルコトカラ、Ωノ上デ1又ハ0ナル値ノミヲトル。今、

$\Omega_1=\{\omega|e(\omega)=1,\ \omega\in\Omega\}$, $\Omega_2=\{\omega|e(\omega)=0,\ \omega\in\Omega\}$

トスレバ、$\Omega=\Omega_1\vee\Omega_2$, 且 $\Omega_1\wedge\Omega_2=\Theta$デアル。故ニ、$\Omega_1$及ビ$\Omega_2$ハ何レモ bicompact Hausdorff space デアル。又、定理ヲ証明スルニハ、Ω'ガΩ_1ノ連続像デアルコトヲ示セバ充分デアル。

(2') $x'(\omega')$ヲΩ'ノ上デ実数値ノミヲトル$C(\Omega')$ノ元トスルナラバ、対應スル$x(\omega)\in R$モ、Ω_1ノ上デ実数値ノミヲトル；

今、或ル$p\in\Omega_1$ニ於テ、$x(p)=\lambda+i\mu$, $\mu\neq0$ デアッタト

スル。シカラバ、$y' \equiv (x'-\lambda e')^2+(\mu e')^2$ ニ対応スル $y \equiv (x-\lambda e)^2+(\mu e)^2$ ハ、$y(p)=0$。一方、Ω' ノ上デ, $y'(\omega') \geq \mu^2 > 0$ デアルカラ $C(\Omega')$ ニハ, y' ノ逆元 z' ガ存在スル：$y'z' = e'$。故ニ、z' ニ対応スル z ニ関シテ、$y \cdot z = e$, 即チ Ω_1 ノ上デ、$y(\omega) \cdot z(\omega) \equiv 1$ デナケレバナラナイ。コレハ $y(p)=0$ ニ反スル。故ニ、$x(\omega)$ ハ Ω_1 ノ上デ実数値デナケレバナラナイ。

(3°) Ω' ノ上ガニ $y'(\omega') \equiv \overline{x'(\omega')}$ ナラバ、Ω_1 ノ上デ、$y(\omega) \equiv \overline{x(\omega)}$。

何トナレバ, $x'(\omega')+y'(\omega')$ $\frac{1}{i}[x'(\omega')-y'(\omega')]$ ハ Ω' ノ上デ共ニ実数値ノミヲトル、故ニ, (2°) ニヨッテ, $x(\omega)+y(\omega)$, $\frac{1}{i}[x(\omega)-y(\omega)]$ モ Ω_1 ノ上デ, 実数値ノミヲトル、故ニ $\overline{x(\omega)} \equiv y(\omega)$

(4) 即チ R ハ $C(\Omega_1)$ ノ, 條件 (*) ヲ満ス closed subring デアル. 故ニ定理 1 ニヨッテ, R ハ Ω_1 或ハ連続像 Ω'' ニ関スル $C(\Omega'')$ ト equivalent デアル. 従ッテ、$C(\Omega')$ ト $C(\Omega'')$ トハ同型デアル、ヨク知ラレタ定理ニヨッテ Ω' ト Ω'' トハ homeomorphic, 即チ Ω' ハ Ω_1 ノ連続像デアル。

〔證終〕

定理 3. Ω ヲ bicompact Hausdorff space, F ヲソノ閉集合トスル時, F ノ上ノ複素数値連続函数ノ全体ヲ Ω ノ上ヘ同時ニ、linear, multiplicative 且 isometric ニ拡張出来ルタメニ必要且充分ナル條件ハ、F ガ (Brsuk

ノ意味デノΩノ *retract* ナルコトデアル。

証明　充分ナルコトハ殆ンド明ラカデアルカラ、必要ナルコトノミヲ證明スル。

$C(F)$ヲ$C(\Omega)$ノ中ヘ同時ニ（定理ニ云フ如ク）拡張出来タトシテ、拡張サレタ$C(\Omega)$ノ元ノ全体ヲRトスル、シカラバRハ$C(F)$ト *equivalent* ナル $C(\Omega)$ノ *closed subring* デアル。

故ニ定理２ニ於テ証明シタコトヨリ、RハΩノ或連続像$f(\Omega)\equiv\Omega'$ニ関スル$C(\Omega')$ト *equivalent* デアル。コノ場合定理１ノ証明ヨリ容易ニワカル如ク、FハΩ'ノ中ニ *homeomorphic* ニ *embed* サレテキル：$F\approx F'\leq\Omega'$.（Fノ各点ニハRノ *maximal ideal* ガ一ツ且唯一ツ対應スルコトヨリ明ラカデアル。）故ニ$F'=\Omega'$ヲ云ヘバ、証明ガ完結スルワケデアル。

今、$x'\neq y'$，$x', y'\in C(\Omega')$トスレバ，対應スル$x, y\in R$ハ、Rガ$C(F)$ノ拡張デアルコトカラ、Fノ上デ、$x(w)\neq y(w)$デアル。故ニ、F'ノ上デ$x'(w')\neq y'(w')$デナケレバナラナイ。（何トナレバ，$w'=f(w)$ナラバ，$x'(w')=x(w)$デアル。）故ニF'ハΩ'ノ眞部分集合デハアリ得ナイ。即チ$\Omega'=F'$デナケレバナラナイ。　（証終）