1194 行列ニ関スル若干ノ定理ノ初等的証明

春木　博　（神高船）

（10月22日受附）

行列ニ関スル次ノ三定理ハ著名デアル。

（定理1）$f(x)$ ヲ x ノ巾級数 $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_k x^k+\cdots\cdots$ トスルトキ．$f(A)=\alpha_0 E+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots\cdots+\alpha_k A^k+\cdots\cdots$ デ表ハサレル n 次ノ行列 A ノ巾級数ガ收斂スルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ A ノ特有根ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ トスルトキ、$f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $\cdots$, $f(\lambda_n)$ ガ收斂スルコトデアル。但シ λ_i ガ p 次ノ等根ナラバ $f^{(p-i)}(\lambda_i)$ ノ收斂ヲ附加スル。（Hensel ノ定理）

（定理2）n 次ノ行列 A ノ特有整式ヲ $D(x)$ トスレバ $D(A)=0$ デアル。（Hamilton-Cayley ノ定理）

（定理3）$f(x)$ ヲ x ノ任意ノ整式トシ、A ノ特有根ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ トスレバ．$f(A)$ ノ特有根ハ、$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ デアル。（Frobenius ノ定理）

以上ノ三定理ヲ統一的ニ証明シテ見ヨウ。証明ハ記述ノ簡単ノ為ニ二次ノ行列ノ場合ニツイテ証明スル。一般ノ n 次ノ行列ノ場合モ全ク同様デアル。

（Lemma）$f(x)$ ヲ x ノ巾級数 $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_k x^k+\cdots$ トシ、A ヲ二次ノ行列．且ツソノ特有根ヲ λ_1, λ_2 トスレバ

$$\begin{cases} f(A) \quad \dfrac{f(\lambda_1)-f(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}A+\dfrac{\lambda_1 f(\lambda_2)-\lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}E & (\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ ナルトキ}) \\ f(A)=f'(\lambda)A+[f(\lambda)-\lambda f'(\lambda)]E. & (\lambda_1=\lambda_2=\lambda \text{ ナルトキ}) \end{cases}$$

（証明）　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$トシ　$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$トオク、

スルト　$A^{n+1}=A^nA$　ナルコトカラ

$$\begin{cases} a_{n+1}=aa_n+cb_n & \cdots\cdots\cdots(1) \\ b_{n+1}=ba_n+db_n & \cdots\cdots\cdots(2) \\ c_{n+1}=ac_n+cd_n & \cdots\cdots\cdots(3) \\ d_{n+1}=bc_n+dd_n & \cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

(1).(2) ヨリ　$a_{n+2}-(a+d)a_{n+1}+\Delta a_n=0$

（但シ $\Delta=\delta(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$）

コノ回帰公式ヨリa_nヲ決定スルニハ、ヨクヤルヤウニ

巾級数　$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots+a_nx^{n-1}+\cdots\cdots$　ヘ

$1-(a+d)x+\Delta x^2$〔之ハ $(1-\lambda_1x)(1-\lambda_2x)$ ニ等シイ！〕ヲカケ

ルコトニヨリ：回帰公式ヲ用ヰテ　結局

$$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots+a_nx^{n-1}+\cdots\cdots=\frac{a-\Delta x}{(1-\lambda_1x)(1-\lambda_2x)}$$ ヲ得ル。

先ヅ　$\lambda_1 \neq \lambda_2$　ナル場合カラ論ズル。

コノトキハ、右辺ノ分数式ヲ部分分数ニ分ケ、ソレカラ巾級数ニ展開シ、左右両辺ノ相当項ノ係数ヲ相等シトオキ$\Delta=\lambda_1\lambda_2$ナル関係ヲ用キレバ結局

$$a_n=\frac{a(\lambda_1^n-\lambda_2^n)+(\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_2\lambda_1^n)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

(1), (2), (3), (4) ヨリ全ク同様ニシテ

$$b_n = \frac{b(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$c_n = \frac{c(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$d_n = \frac{d(\lambda_1^n - \lambda_2^n) + (\lambda_1\lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

以上ニヨリ A^n ノ形ハ判ツタカラ、之ヲ $f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots\cdots + \alpha_n A^n + \cdots\cdots$ ヘ代入スレバ結局 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ナルトキハ

$$f(A) = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} E$$

トナル。

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ナルトキハ　上式ニ於テ、$\lambda_1 \to \lambda_2$ ナラシムレバヨイ。　　（証明了）

コノ *Lemma* ノ証明ガ出来レバ、前述ノ三定理ノ証明ハ容易デアル。

<u>定理1ノ証明</u>　*Lemma* ヨリ明カ。

<u>定理2ノ証明</u>　$D(x)$ ヲ行列 A ノ特有整式トシ $f(x)$ ヲ二次ノ任意ノ整式，$x^2 + \beta x + \gamma$ トスル。〔$f(x) - D(x)$ トシテモヨイ〕

又、A ノ特有根ヲ λ_1, λ_2 トスル。

$f(x)$ ヲ $D(x)$ デ割レバ商ハ 1 トナリ、剰余 $R(x)$ ハ

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ ナルトキハ } \dfrac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} x + \dfrac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ ナルトキハ } f'(\lambda) x + (f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)) \end{cases}$$

トナル。即チ　$f(x) = D(x) + R(x)$

コノ式ニ於テてノトコロヘ　Aトオケバ

$$f(A)=D(A)+R(A)$$

サテ *Lemma* ニヨリ丁度　$f(A)=R(A)$　ダカラ

$$D(A)=0$$

定理3ノ証明　*Lemma* ヲ使ヘバ計算ニヨリ容易ニ証サレル。以上ハ　二次ノ行列ノ場合ニツイテ証明シタガ、n次ノ場合モ全ク同様ニ証サレル。タダ*Lemma*ニ於テ$f(A)$ノ形ガ二次ノ場合ハ$f(x)$ヲAノ特有整式$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$デ割ツタトキノ剰余（高々一次）トナツタガ、$n$次ノ場合ハ$f(A)$ノ形ハ、$f(x)$ヲAノ特有整式（$n$次）デ割ツタトキノ剰余（高々$n-1$次）トナル迄デアル。

（完）