1. Iversen-Gross ノ定理ノ拡張

遠木幸成(阪大)

(9月27日受付)

$w=f(z)$ ヲ領域Dデ一価有理型トシソノ境界上ノ一点ヲz_0トシz_0ニ収歛スルD内ノ二ツノ連續曲線ヲΓ_1, Γ_2トスル。

若シ領域Dノ境界ガ只一ツノJordan curveカラナルトキハIversen-Grossノ定理トシテ次ノコトガ知ラレテヰル。即チ

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\Gamma_1}} f(z)=\alpha,\quad \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\Gamma_2}} f(z)=\beta\quad (\alpha\neq\beta)$$ ナルトキハ

z_0ノ近傍ニテ$w=f(z)$ハ全w平面カラ高々二ツノ値ヲ除イタ残リノ他ノスベテノ値ヲ無限回トル。

吾々ハDノ單連結性ヲ仮定セズニ一般ノ領域ニツイテ考ヘルコトニスル。

z平面上ノ一ツノ領域Dト一ツノ円環領域E; $0<r_2<|z-z_0|<r_1$ トノ共通部分ハ高々可附番個ノ領域ヨリナルコトハ明ラカデアルガ若シソノ中ノアル領域ノ境界ガ円周$C(r_1)$; $|z-z|=r_1$ 及ビ円周$C(r_2)$, $|z-z_0|=r_2$ ノ各々ト共通点ヲモツトキソノ領域ヲ領域Dノz_0ヲ中心トスル切断半径r_1, r_2 $(r_1>r_2)$ナルModul M ($M=\log r_1/r_2$) ノ切断領域、或ハ単ニModul Mノ切断領域ト呼ビ$\Delta_{r_1 r_2}$又ハΔ_Mデ表ハス。

円周$C(r)$ $|z-z_0|=r$ $(r_1>r>r_2)$ トΔ_Mトノ共通部分ハ高々可附番個ノ円弧ノ和デアルガソノ$w=f(z)$ニヨル像曲線ノ長サヲ$L(\Delta_M, r)$デ表ハシ特ニ$C(r_i)$; $|z-z_0|=r_i$ $(i=1, 2)$ トΔ_Mノ境界ノ共通部分ノ像ノ長サヲ同様ニ$L(\Delta_M, r_i)$ $(i=1, 2)$デ表ハスコトニスル。亦領域Δ_Mノ$w=f(z)$ニヨル像面積ヲ$A(\Delta_M)$デ表ハス。但シ長サ及ビ面積ハ半径$\frac{1}{2}$ノRiemann球上デ計ルモノトスル。

Lemma 切断半[illegible]

ノ切断領域ヲΔ_Mトスル。若シΔ_Mヲ[illegible]

[illegible]直スル切断円弧ノ$w=f$[illegible]

像曲線ノ長サガ常ニ正数$\ell(>0)$ヨリ大ナルトキ

$M \geqq 18\pi\ell^{-\frac{1}{2}}$ ナラバ Δ_M ノ部分切断領域 $\Delta_{M'}$ ガ存在シテ次ノ條件ヲ満足スル。即チ $\Delta_{M'}$ ハ r_1' r_2' ヲ切断半径トシ(但シ $r_1 > r_1' > r_2' > r_2$)

$$M' = \log\frac{r_1'}{r_2'} \geqq \frac{1}{3}M, \quad L(\Delta_M, r_i') < A(\Delta_{M'})^{\frac{2}{3}} \quad (i=1,2)$$

(証明) 像曲線ノ長サ $L(r)$ ト像領域ノ面積 $A(r)$ トノ関係ハ Schwarz ノ不等式ヨリ導カレル次ノ不等式ガアル。即チ

$$\log\frac{r}{r_2} \leqq 2\pi\int_{r_0}^{r}\frac{dA(r)}{L^2(r)} \tag{1}$$

今 $L(r) \geqq \ell$ ナラバ

$$\log\frac{r}{r_0} \leqq \frac{2\pi}{\ell^2}A(r) \tag{2}$$

若シ(1)ニ於テ $L(r) \geqq A(r)^{\frac{2}{3}}$ ナラバ

$$\log\frac{r}{r_0} \leqq 2\pi\int_{r_0}^{r}\frac{dA(r)}{A(r)^{\frac{4}{3}}} = 6\pi\left[\frac{1}{A(r_0)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{A(r)^{\frac{1}{3}}}\right] \leqq 6\pi A(r_0)^{-\frac{1}{3}}$$

今 r_3, r_4 ヲ $\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}$ ナル如ク選ビ切断半径 r_3, r_4 ナル Modul $\frac{1}{3}M$ ノ切断領域 $\Delta_{r_3r_4}$ ヲ作レバ(2)ヨリ

$$\frac{1}{3}M \leqq \frac{2\pi}{\ell^2}A(\Delta_{r_3r_4})$$

$$\therefore \quad A(\Delta_{r_3r_4}) \geqq \frac{M\ell^2}{6\pi} \tag{4}$$

次ニ切断半径 r_3 r_2 ナル Modul $\frac{2}{3}M$ ノ切断領域 $\Delta_{r_3r_2}$ ヲ考ヘ $r_0 = r_4$ $r = r_2$ トオケバ $\log\frac{r}{r_0} = \frac{1}{3}M$

又(4)ヨリ $\quad A(r_0) = A(\Delta_{r_3r_2}) \geqq \frac{M\ell^2}{6\pi}$

ナル故ニ若シ $r_4 < r < r_2$ ナル r ニ対シテ常ニ

$$L(\Delta_{r_3r_2}, r) \geqq A(\Delta_{r_3}r)^{\frac{2}{3}}$$

ナラバ(3)ニヨリ

$$\frac{1}{3}M \leqq 6\pi\left\{\frac{M\ell^2}{6\pi}\right\}^{-\frac{1}{3}}$$

$$M < 18\pi\ell^{-\frac{1}{2}}$$

従ッテ仮定ニ矛盾スル故ニ $r_4 > r_2' > r_2$ ナル r_2 ガ存在シテ

$$L(\Delta_{r_3 r_2'}, r_2') < A(\Delta_{r_3, r_2'})^{\frac{2}{3}}$$

トナル。　同様ニ $r_1 > r_1' > r_3$ ナル r_1' ガ存在シテ

$$L(\Delta_{r_1' r_4}, r_1') < A(\Delta_{r_1' r_4})^{\frac{2}{3}}$$

従ッテ　$L(\Delta_{r_1' r_2'}, r_i') < A(\Delta_{r_1' r_2'})^{\frac{2}{3}} \quad (i = 1, 2)$

（証了）

$\boxed{\text{定理}}$　$w = f(z)$ ヲ領域 D デ有理型トスル。D ノ境界上ノ一点ヲ z_0 トスルトキ D 内ノ点カラ z_0 ニ收斂スル互ニ交ラヌ二ツノ道 Γ_1 Γ_2 ガアル。

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Gamma_1}} f(z) = \alpha, \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Gamma_2}} f(z) = \beta \quad (\alpha \neq \beta)$$

トシ D ヨリ Γ_1, Γ_2 ヲ除イタ残リノ領域ヲ D' トスルトキ次ノ條件 i) ii) ヲ満足スル領域 D' ノ z_0 ヲ中心トスル可附番無限個ノ切断径 r_{2i-1} r_{2i} $(i = 1, 2 \cdots)$ ノ Modul M_i $\left(M_i = \log \frac{r_{2i-1}}{r_{2i}}\right)$ ノ切断領域 Δ_{M_i} ガ存在スルナラバ $w = f(z)$ ハ z_0 ノ近傍ニテ全 w 平面上ノ高々二ツノ値ヲ除ケバ他ノスベテノ値ヲ無限回トル。

i) $\lim_{i \to \infty} M = \infty$

ii) 各 Δ_{M_i} ハ互ニ共通点ヲモタヌ單連結ナ領域デソノ境界ハ半径 r_{2i-1}, r_{2i} ノ円弧ヲ結ブ Γ_1 及ビ Γ_2 ノ部分ヲ含ムモノトス。

(証明) 若シ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ノ三ツノ除外値ガアルトスルハ十分大ナル正数 N_1 ヲトレバ $i > N_1$ ナラバ Δ_{M_i} ニ於テハ $w = f(z)$ ハ最早 γ_1 γ_2 γ_3 ノ値ヲ全然トラナイ。

先ヅ $\alpha \neq \gamma_i$, $\beta \neq \gamma_i$ $(i = 1\ 2\ 3)$ トスル若シ然シサル場合モコノ場合ト全ク同様ニ証明出来ルコトハ容易ニワカルデアラウ。

α, β, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ ノ相互ノ距離ノ最小ナモノヲ ℓ トスル　今十分大ナル正数 N_2 (但シ $N_2 \geqq N_1$) ヲトレバ $i > N_2$ ナルスベテノ i ニ対シ Δ_{M_i} ノ境界ニ届スル Γ_1 Γ_2 上ノ点 z'　$w = f(z')$ ニヨル像 w ハスベテ $|w - \alpha| < \frac{\ell}{4}$ $|w - \beta| < \frac{\ell}{4}$ ヲ満足スルヨウニ出来ル。故ニ円 $C(r)$ $|z - z_0| = r$ (但シ $r_{2i} < r < r_{2i-1}$) ト Δ_{M_i} トノ共通部分弧

ハ Γ_1, Γ_2 ニ由テ変ハルモノガ必ズ存在スレバ $i > N_2$ ナラバ $L(\Delta_{M_i}, \Gamma) > \frac{l}{2}$ デアル。従ッテ円板 $|w-\alpha| \leqq \frac{l}{4}$ 及ビ円板 $|w-\beta| \leqq \frac{l}{4}$ ノ原像ヲ Δ_{M_i} カラ除イタ残リノ一ツノ切断領域ヲ Δ'_{M_i} トスレバ $L(\Delta'_{M_i}, \Gamma) \geqq \frac{l}{2}$ ヲ満足スル Δ'_{M_i} ガ必ズアル。従ッテ $\lim_{i\to\infty} M_i = \infty$ ヨリ十分大ナル正数 N_3 (但シ $N_3 \geqq N_2$) ヲトレバ $i > N_3$ ナルトキハ $M_i \geqq 18\pi(\frac{1}{2}l)^{-\frac{1}{2}}$ ガ成立シ Lemma ニヨリ $\overline{M}_i \geqq \frac{1}{3}M_i$ ナル如キ Δ'_{M_i} ノ M.i.sub $\overline{M}_i$ ナル部分切断領域 $\Delta_{\overline{M}_i}$ ガ存在シテ

$$L(\Delta_{\overline{M}_i}, \gamma_{2i-1}) + L(\Delta_{\overline{M}_i}, \gamma_{2i}) \leqq 2A(\Delta_{\overline{M}_i})^{\frac{2}{3}} \quad (5)$$

今全 W 平面ヨリ円板 $|w-\alpha| \leqq \frac{l}{4}$, $|w-\beta| \leqq \frac{l}{4}$ 及ビ三点 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ヲ除イタ面ヲ Grundfläche トシテ $\Delta_{\overline{M}_i}$ ヲ Überlagerungsfläche トシタノ Characteristic ヲ $\rho(\Delta_{\overline{M}_i})$ トシ $\Delta_{\overline{M}_i}$ ノ平均枚数ヲ S_i 又 Relativ Rand ヲ L_i トスレバ Ahlfors ノ基本定理ニヨリ

$$\rho(\Delta_{\overline{M}_i}) \geqq 3S_i - hL_i \quad (6)$$

然ルニ Δ_{M_i} ハ単連結ナル故ニ Δ_{M_i} ノ境界ハ他ノ境界ヲスベテ内部ニ含ム如キ只一ツノ境界ヲ除イテハスベテ円 $|w-\alpha| = \frac{l}{4}$ 或ハ円 $|w-\beta| = \frac{l}{4}$ ノ原像デアル。故ニ $|w-\alpha| = \frac{l}{4}$ 及ビ $|w-\beta| = \frac{l}{4}$ 上ノ平均枚数ヨリ大デナイ。従ッテ Ahlfors ノ定理ニヨリ $2(S_i + 2hL_i)$ ヨリ小デアル。故ニ

$$\rho(\Delta_{\overline{M}_i}) < 2(S_i + hL_i)$$

コレヲ(6)ニ代入シテ

$$2(S_i + hL_i) > 3S_i - hL_i$$
$$\therefore\ 0 > S_i - 3hL_i$$

(5) 及ビ $S_i = \frac{1}{\pi}A(\Delta_{\overline{M}_i})$ ヲ代入スレバ

$$0 > \frac{1}{\pi}A(\Delta_{\overline{M}_i}) - 6hA(\Delta_{\overline{M}_i})^{\frac{2}{3}}$$
$$\therefore\ 0 > 1 - 6\pi h A(\Delta_{\overline{M}_i})^{-\frac{1}{3}} \quad (7)$$

然ルニ $\overline{M}_i \geqq \frac{1}{3}M_i$ ナル故ニ $\lim_{i\to\infty}\overline{M}_i = \infty$ 従ッテ $\lim_{i\to\infty} A(\Delta_{\overline{M}_i}) = \infty$ 故ニ十分大ナル正数 N (但シ $N > N_3$)

ナトレバ $i>N$ ニ対シ

$$6\pi h\{A(\Delta_{\overline{M}_i})\}^{-\frac{1}{3}}<1$$

トナル。コレハ(7)ニ矛盾スル。故ニ $i>N$ ナルトキ $w=f(z)$ ハ Δ_{M_i} デ高々二ツノ値ヲ除イタ他ノスベテノ値ヲ少クトモ一回ハトル。然ルニ z_0 ノ近傍ハ無限ノ Δ_{M_i} ヲ含ム故ニ定理ハ成立スル。

次ニ $\alpha=\gamma_1$ ナルトキハ上ノ証明デ Grundfläche トシテ全W平面ヨリ $|w-\alpha|\leqq\frac{l}{4}$, $|w-\beta|=\frac{l}{7}$, γ_2、γ_3 ヲ除イタモノヲトレバヨイ。ソノトキ Δ_{M_i} ヨリ $|w-\alpha|\leqq\frac{l}{4}$ 原像ヲ除イテモ Characteristic ハ変ラナイ。何故ナラバ Δ_{M_i} ハ単連結デアルカラソレカラ $|w-\alpha|\leqq\frac{l}{4}$ ノ原像ヲ除イタトキ若シ複連結ナ切断領域ガ出来タトスレバ一番外ノ境界ヲ除ケバ他ノ境界ハ閉ヂテ居テ而モ $|w-\alpha|=\frac{l}{4}$ ノ原像デアル。従ッテソノ境界ニヨリ囲マレテヰル領域ハ $|w-\alpha|<\frac{l}{4}$ ノ原像デアル故ニ α 点ガ存在スルコトニナリ $w=f(z)$ ハ Δ_{M_i} デ $\alpha=\gamma_1$ ヲトラヌコトニ矛盾スル。故ニ $\rho(\Delta_{\overline{M}_i})<S_i+hL_i$ トナリ(7)ガ成立スルコトニナル。

其他ノ場合モ同様ニ証明サレルコトハ明ラカデアラウ。

(証了)

注) Dガ単連結ナ Jordan 領域ナルトキハ條件 i) ii) ノ満足スル Δ_{M_i} ガトレルコトハ明ラカデアルカラコノ定理ハ明ラカニ Iversen-Gross ノ定理ノ拡張デアル。亦集積値集合ニ於テ $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(P)}$ (但シPハDノ境界トス)ノ除外値ハ能代先生ノ定理ニヨリ漸近値ル故ニ除外値ガ二ツアレバ全W平面ノ他ノ値ハスベテ無限回トルトイフ結果ガ出タ。コレモ単連結ノ場合ハ Iversen-Gross ノ定理ノ拡張デアル。

尚単連結ノ場合ノ証明ハ上ノ証明カラ容易ニワカルウニ切断領域ナル概念ヲ用ヒズ従ッテ Lemma 用ヒヌ Ahlfors ノ Überlagerungsfläche ニ関ス基本定理ダケデ簡単ニ証明サレル。