3. 收斂級數に関する一問題

角谷静夫 （阪大）
（9月27日受付）

$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ を正項收斂級數とするとき部分級數の和 $s = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{n_\nu}$ 全体の作る集合 $\mathfrak{S}$ は如何なる性質を持つか？（但し $\{x_{n_\nu} \mid \nu = 0, 1, 2, \cdots\}$ は $\{x_n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$ の有限又は無限の部分系列を表はす。特に $\{x_{n_\nu}\}$ として empty set をとれば $s = 0$ は $\mathfrak{S}$ の element と考へられる）此の問題は木村直樹君によつて提出された。部分級數の和 $s = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{n_\nu}$ を考へる代りに、始めの級數の各項の附号を任意に變へたものの和 $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \pm x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ $(\varepsilon_n = \pm 1)$ を考へても全く同様の議論が出来るから（$s = \frac{1}{2}(S_0 + \sigma)$ なる對應による）今後は s の代りに σ を考へることにする。（$\mathfrak{S}$ は同じ記号を保留する）

$\mathfrak{S}$ が $-S_0$　$+S_0$ を兩端とする perfect set になることは容易に示される。又

(1) $$x_k \leqq \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n$$

がすべての k に對して成立すれば $\mathfrak{S}$ は一つの closed interval になり

(2) $$x_k > \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n$$

がすべての k に對して成立すれば $\mathfrak{S}$ は totally disconnected になることも容易に示される。(2) が無限に多くの k に對して成立すると云ふだけでは $\mathfrak{S}$ が closed interval の有限個の和にならないと云ふことを云へるだけであつて此の場合 $\mathfrak{S}$ は必ずしも totally disconn

本談話に於ては(2)が無限に多くのkに對して成立し、しかも$\mathfrak{G}$がtotally disconnectedにならない實例を興へたら

$\frac{1}{12} \leqq \alpha < \frac{1}{7}$を滿足する實数$\alpha$に對して

$$(3)\qquad x_{4n} = \alpha^n, \quad x_{4n+1} = \frac{5}{6}\alpha^n, \quad x_{4n+2} = \frac{4}{6}\alpha^n,$$
$$x_{4n+3} = \frac{3}{6}\alpha^n, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

と置く。即ち$\{x_n\}$は

$$(4)\qquad 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \alpha, \frac{5}{6}\alpha, \frac{4}{6}\alpha, \frac{3}{6}\alpha, \alpha^2, \frac{5}{6}\alpha^2, \frac{4}{6}\alpha^2,$$
$$\frac{3}{6}\alpha^2, \cdots\cdots$$

なる系列である。これが上記の性質を持つことを示さう。先づ　$\alpha < \frac{1}{7}$なることより

$$(5)\qquad \sum_{n=4k}^{\infty} x_n = \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6}\right)\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n$$
$$= \frac{3\alpha^k}{1-\alpha} < \frac{3}{6}\alpha^{k-1} \equiv x_{4k-1}$$

であるから(2)を滿足するkが無限に多く存在する。次に　$\pm 1 \pm \frac{5}{6} \pm \frac{4}{6} \pm \frac{3}{6}$　は$\pm$を適當にとれば

$$(6)\qquad 0, \pm\frac{2}{6}, \pm\frac{4}{6}, \pm\frac{6}{6}, \pm\frac{8}{6}, \pm\frac{10}{6}, \pm\frac{12}{6}, \pm\frac{18}{6}$$

の値を取る。($\pm\frac{14}{6}$, $\pm\frac{16}{6}$が缺けてゐることに注意!)
よつて　$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \pm x_n$　は

$$(7)\qquad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k$$

といふ形になり且つこの形の数のどれにでもなり得る。但しσ_kは(6)に表はれる任意の数である。
$\alpha \geqq \frac{1}{12}$なることと(6)が$0, \pm\frac{2}{6}, \pm\frac{4}{6}, \pm\frac{6}{6}, \pm\frac{8}{6}$,
$\pm\frac{10}{6}, \pm\frac{12}{6}$ $(= \pm 2)$を含むこととより　σは$-\frac{2}{1-\alpha}$と

$+\dfrac{2}{1-\alpha}$ との間の任意の数を取り得る

わかる。即ち $\mathfrak{S}$ は closed interval を含みつつ totally disconnected ではあり得ない。

最後に $s=-\dfrac{3}{1-\alpha}=-\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ を左端とする closed interval が $\mathfrak{S}$ に含まれないことは次の如くすればわかる。(6) には $-\dfrac{14}{6}$ $-\dfrac{16}{6}$ が含まれてゐないし，$\sum_{n=4}^{\infty}x_n=\dfrac{3\alpha}{1-\alpha}<\dfrac{1}{2}$ であるから $-\dfrac{18}{6}+\dfrac{3\alpha}{1-\alpha}$ と $-\dfrac{12}{6}-\dfrac{3\alpha}{1-\alpha}$ との間にある数は $\mathfrak{S}$ に屬さない。同様に $-\dfrac{18}{6}-\dfrac{18}{6}\alpha+\dfrac{3\alpha^2}{1-\alpha}$ と $-\dfrac{18}{6}-\dfrac{12}{6}\alpha-\dfrac{3\alpha^2}{1-\alpha}$ との間の数は $\mathfrak{S}$ に屬さない。一般に $-\dfrac{18}{6}-\dfrac{18}{6}\alpha-\cdots\cdots-\dfrac{18}{6}\alpha^{n-1}-\dfrac{18}{6}\alpha^n+\dfrac{3\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ と $-\dfrac{18}{6}-\dfrac{18}{6}\alpha-\cdots\cdots-\dfrac{18}{6}\alpha^{n-1}-\dfrac{12}{6}\alpha^n-\dfrac{3\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ との間の数は $\mathfrak{S}$ には屬さない。$(n=1,2,---)$ よつて $s=-\dfrac{3}{1-\alpha}$ を左端とする如何なる closed interval も $\mathfrak{S}$ に含まれない。

$\mathfrak{S}$ の topological-metrical characterization は未だ得られてゐない。