5. Complex-Banach Space ニ於ケル巾級数ニ就テ

霜田伊左衛（阪大）

（10月11日受付）

Complex-Banach Space E ノ上デ定義セラレ Complex-Banach Space E′ ノ値ヲトル函数 $p(x)$ $(x\in E)$ ガ (i) $x, y\in E$ ナルトキ $p(x+\alpha y)=\sum_{0}^{n}\alpha^{\nu}p_{\nu}(x,y)$ (ii) アル x, y ニ対シテ $p_n(x,y)\neq 0$ (iii) E ノ各点デ定義セラレ且連續, (iv) $p(\alpha x)=\alpha^{n}p(x)$ ナルトキ p ヲ n 次ノ齊次多項式ト云フ。

今 $h_n(x)$ ヲ n 次ノ齊次多項式トシタトキ $\sum_{n=0}^{\infty}h_n(x)$ ヲ抽象巾級数ト云フ。

定義1. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(x)$ ニ於テアル実数 λ ガ存在シテ $r<\lambda$ ナルトキ $\|x\|\leq r$ ニ於テ $\|f(x)\|\leq M_r$, 又 $r>\lambda$ ナルトキ $\|x\|\leq r$ ニ於テ $f(x)$ ハ正則且有界トハナラナイ。

コノトキ λ ヲ $f(x)$ ノ有界半径ト名付ケル。

定義2. アル実数 τ ガ存在シ $\|x\|<\tau$ ナルトキ $f(x)$ ハ正則デ $r>\tau$ ナルトキ $\|x\|<r$ デ $f(x)$ ハ正則トナラナイ。

[定理] $$\overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1} \|h_n(x)\|} = \frac{1}{\lambda}$$

$\|x\| \leq 1$ ニ含マレル凡ユル Compact set G ノ集合ヲ𝔊トスルトキ

$$\sup_{G \in 𝔊} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|h_n(x)\|} = \frac{1}{\tau}$$ 一般ニ $\tau \geq \lambda$ トナル。

[註] $\tau > \lambda$ ナル例ハ後ニ述ベル。

[証明] 殆ンド同様ニ証明サレル故 τ ニツイテノミ行フ。

(i) $\|y\| < \tau$ ニ於テ $f(y)$ ハ正則トナルコトノ証明

ε ヲ任意ノ正数トスルトキ $\|y\| \leq \tau - 2\varepsilon$ ニ含マレル注意ノ Compact set G' ニ於テ $G' \ni y$ ナルトキ $x = y/\tau - 2\varepsilon$ トオケバ x ノ集合ハ $\|x\| \leq 1$ ニ於ケル Compact set G トナル。

$$\sup_{G \in 𝔊} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|h_n(x)\|} = \frac{1}{\tau}$$ ナル故

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|h_n(x)\|} \leq \frac{1}{\tau}$$

$$\sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|h_n(x)\|} \leq \frac{1}{\tau - \epsilon}, \quad n \geq n_0(\varepsilon)$$

$$\|h_n(x)\| \leq \frac{1}{(\tau - \varepsilon)^n}, \quad n \geq n_0(\varepsilon), \quad x \in G$$

$$\therefore \quad \|h_n(y)\| = \|h_n(x)\| (\tau - 2\varepsilon)^n \leq \left(\frac{\tau - 2\varepsilon}{\tau - \varepsilon}\right)^n \quad y \in G'.$$

故ニ $\sum h_n(y)$ ハ G' デ一様收斂スル。ε 及ビ G' ハ任意ナル故 A E Jaylor 氏ノ定理[1] ニヨリ $f(y)$ ハ $\|y\| < \tau$ デ正則トナル。

[1] Analylic function in general analysis, Annalic And R. Sairla Normale Superiore di Pisa, II. Vol. VI, 11.

「(iii) $r > \tau$ ナルトキハ $\|y\| < r$ デ正則トスレバ不合理ナルコトノ証明。」

$0 < \varepsilon < \frac{r-\tau}{4}$ ニ対シ $f(x)$ ハ $\|x\| \leq \tau + 4\varepsilon$ デ正則トナル。従ツテ $\|y\| < \tau + 3\varepsilon$ ニ含マレル任意ノ Compact set G' ニ於テ $y \in G'$ ノトキ $|\alpha| = \frac{\tau+4\varepsilon}{\tau+3\varepsilon}$ $\alpha y = y'$ トスレバ y' ハ $\|y'\| \leq \tau + 4\varepsilon$ ニ含マレル Compact set G'' トナルカラ $\|f(y')\| \leq M_{G''}$ $(y' \in G'')$ トナル。又容易ニ分ル様ニ

$$h_n(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\alpha y)}{\alpha^{n+1}}\, d\alpha, \quad \left(C : |\alpha| = \frac{\tau+4\varepsilon}{\tau+3\varepsilon},\ y \in G'\right)$$

$$\therefore \quad \|h_n(y)\| \leq \frac{M_{G''}}{|\alpha|^n} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

然ルニ $\sup\limits_{G \subset R} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup\limits_{x \in G} \|h_n(x)\|} = \frac{1}{\tau}$ ナル故 ε ニ対シテ G ガ定マリ $\overline{\lim} \sqrt[n]{\sup\limits_{x \in G} \|h_n(x)\|} \geq \frac{1}{\tau+\varepsilon}$

従ツテ $n_1 < n_2 < n_3 < \quad < n_\nu < \cdots$ ガアリ

$$\sqrt[n_\nu]{\sup_{x \in G} \|h_{n_\nu}(x)\|} \geq \frac{1}{\tau + 2\varepsilon}$$

従ツテ n_ν ニ対シテ x_ν ガ G ノ中ニアリ

$$\|h_{n_\nu}(x_\nu)\| \geq \frac{1}{(\tau+3\varepsilon)^{n_\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

今 $y = x(\tau+3\varepsilon)$ $(x \in G)$ ノ集合ヲ G' トスレバ G' ハ $\|y\| \leq \tau + 3\varepsilon$ ニ含レル Compact set トナル。然ルニ $y_\nu = x_\nu(\tau+3\varepsilon)$ トスルト $\|h_{n_\nu}(y_\nu)\| \geq 1$ $(\nu = 1, 2, \quad) \cdots (2)$

(1) (2) ハ矛盾スル。

$\tau > \lambda$ ナル例トシテ complex (l_2)-space ニ於テ
函数 $$f(x) = x_1 + 2x_2^2 + \cdots + n x_n^n + \cdots\cdots$$
ヲ考ヘル。 $$\overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1} \|h_n(x)\|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n} = 1$$

ナル故 $\lambda = 1$

次ニ $\|x\| \leq 1$ ニ含レル Compact set G ニ対シテハ

$$\sum a_n^2 < \infty \quad (a_n > 0)$$ ナル $\{a_n\}$ ガアリ 任意ノ m ニ対シ

$$\sum_{m=n}^{\infty} |x_m|^2 \leq \sum_{m=n}^{\infty} a_n^2$$ ナル故

$$\sup_{x\in G} n|x_n|^n \leq n\left(\sqrt{\sum_{m=n}^{\infty} a_m^2}\right)^n$$

$$\therefore \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sup_{x\in G} n|x_n|^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_n^{\infty} |a_m|^2}$$

$= 0$ $\quad\therefore$ G ハ任意ナル故 $\tau = \infty$

即チ $f(x)$ ハ (l_2)-space デ regular トナリ

而モ $r > 1$ ナラバ $\|x\| < r$ デ有界デナイ。

念ノタメニ $x^{(n)} = (0, 0, \quad 1, \cdots)$ (n 番目ノ座標ハ 1) デハ $\|f(x^{(n)})\| = n$ トナリ有界性が破レル (以上)