

7. 一般化 # V 9 Peano curve 一ツ

井関清志

(10月28日受付)

H. Lebesgue, B. Jessen, W. Sierpiński 等 = ヨツテ
 一般化 # の Peano curve がエラレテ # 10. コノ note
 ノ目的ハカカル curve テーヲエラレコト = アル。即チ閉
 区間 $0 \leq t \leq 1$ テ定義サレタ値域ガ閉区間 $0 \leq a_n \leq 1$
 = アル可附番ヲ、一價連続函数 $\{\varphi_n(t)\}$ ガアリ、
 $0 \leq a_n \leq 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$) ナル系列 $\{a_n\}$ ヲエラレト

$$\varphi_n(t^*) = a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ナリ $0 \leq t^* \leq 1$ ガカクモ一ツ存在スル。コレガ一
 般化サレタ Peano curve テアイル。

$\varphi_n(t)$ ノ作ルヲ $x =$ 補助函数 $x(t)$ ノ次ノヤウニ足
 義スル。 $x(t)$ ハ $0 \leq t$ テ定義サレタ一價連続函数
 テ

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 0 & 2n - \frac{1}{3} \leq t \leq 2n + \frac{1}{3} \\ & (n=1, 2, 3, \dots) \\ 1 & 2n + \frac{2}{3} \leq t \leq 2n + \frac{4}{3} \\ & (n=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

ソノ他、 $t =$ 対シテハ $x(t)$ ガ一價連続且 $0 \leq x(t) \leq 1$
 = ナルヤウニ $x(t)$ ノ次 = $\varphi_n(t)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) ノ

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2^2} x(3^2 t) + \frac{1}{2^3} x(3^4 t) +$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} x(3t) + \frac{1}{2^2} x(3^3 t) + \frac{1}{2^3} x(3^5 t) + \dots$$

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{2} x(3^3 t) + \frac{1}{2^2} x(3^{11} t) + \frac{1}{2^3} x(3^{19} t) +$$

ト定義スレバ、コレガ求メルモノデアル。 $\varphi_n(t)$ ガ $0 \leq t \leq 1$ /
 テ一價連続且、 $0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$ 、ハ明カデアラウ。次ニ
 $0 \leq a_n \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$) ナル 系列 $\{a_n\}$ ヲトレバ、
 $\varphi_n(t^*) = a_n$ ($n=1, 2, \dots$)

ト $0 \leq t^* \leq 1$ / 存在ヲ示サウ。

a_n ノ = 画展開シテ、

$$a_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2^2}t_3 + \frac{1}{2^2}t_5 + \dots$$

$$a_2 = \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2^2}t_6 + \frac{1}{2^3}t_{10} + \dots$$

$$a_3 = \frac{1}{2}t_4 + \frac{1}{2^2}t_{12} + \frac{1}{2^4}t_{20} + \dots$$

ト t^* トシテ

$$t^* = \frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{3^2}t_2 + \dots$$

トオケバ、

$$\varphi_n(t^*) = a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

デアイル。何者、

$$3^k t^* = 2(3^{k-1}t_1 + \dots + 3t_{k-1} + t_k) + \frac{2}{3}t_{k+1} + \dots \quad (k=1, 2, \dots)$$

モシ $t_{k+1} = 0$ ナラバ、 $\chi(t)$ ノ定義ニヨリ $\chi(3^k t^*) = 0$

又 $t_{k+1} = 1$ ナラバ、 $\chi(3^k t^*) = 1$ 何レニシテモ

$$\chi(3^k t^*) = t_{k+1}$$

即チ $\varphi_n(t)$ ノ 定義ニヨリ

$$\varphi_n(t^*) = a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

(終)