13. Complex-Banach space ニ於ケル解析函数ニツイテ(I)

阪大　霜田伊左衛

(1946, XI, 19)

A. E. Taylor 氏ハ Osgood ノ定理ヲ拡張シテ, 変域ヲ複素平面ダト complex-Banach space E' ノ product space ニトリ 値域ヲ complete Banach space E'' ニ取ッテ居リマス [1] 此ノ note ノ目的ハ 複素平面 Z ヲ complex-Banach space E ニ 拡張スルコトデアリマス。

必要ノタメニA. E. Taylor氏ノ定理A, 定理B[1]ヲ示シマス。

$\boxed{\text{定理A}}$ E, E'ヲcomplex Banach spaceトスルトキ $\{f_n(x)\}$ハEノdomain Dデ定義セラレ, E'ノ値ヲトルregularナ函数ノsequenceトスル 若シ

i) Dノ各点デ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

ii) Dニ含マレル任意ノ領域デ有界ナルトキ $f(x)$ハDデregularトナル。

$\boxed{\text{定理B}}$ $f(x, y)$ハ$E\times E'$内ノdomain Dデ定義セラレE''ノ値ヲトル.

i) Dニ於テxヲfixスレバyニツキ正則
yヲfixスレバxニツキ正則

ii) (x, y)ニツイテ連続 ナルトキ
$f(x, y)$ハDデ正則トナル.

$\boxed{\text{定理1}}$ $\{f_n(x)\}$ハEノdomain Dデ定義セラレE'ノ値ヲトル正則函数ノsequenceトスル. 若シ

i) Dノ各点デ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

ii) Dニ含マレル任意ノcompact set Gニ於テ $M_G\ (>0)$ガ存在シテ$\|f_n(x)\| \leqq M_G$, ナルトキ $f(x)$ハDデ正則トナル.

(証明) D内ノ任意ノ点ヲx_0トスル. モシD内デ $\|x-x_0\| \leqq \rho$ナルトキ$\|f_n(x)\| \leqq M$ナル様ナ一対ノ正数ガ存在シナカッタトスレバ $x_n \to x_0$, $\|f_{m_n}(x_n)\| > n$, $\{f_{m_n}(x)\} \subset \{f_n(x)\}$ $x_n \in D$, ナル様ナ点列$\{x_n\}$ガ存在スル. $\{x_n\}$ハcompact setナル故 ii)ニヨリ $\{f_n(x)\}$ハ$\{x_n\}$デ有界デナケレバナラヌ. 之ハ不合理ナル故必ズ一対ノ正数ρ, Mガ存在シ $\|x-x_0\| < \rho$ナルトキ$\|f_n(x)\| \leqq M$トナル. 又$x_0 \in D$ナル故$\|x-x_0\| < \rho$ Dニ含マレル様ニ出来ル. ココデ$\|x-x_0\| < \rho$ニ定理Aヲ適用スレバ $f(x)$ハ$\|x-x_0\| < \rho$デ正則トナル. x_0ハ任意ナル故$f(x)$ハDデ正則トナル。

〔註1〕 定理1ガ成立スレバ容易ニ定理Aノ成立スルコトガ分リマスカラ，定理Aト定理1ハ同等デアリマス。

$\boxed{\text{定理 2}}$ $E \times E'$ ノ domain D デ定義セラレ，E'' ノ値ヲトル函数 $f(x, y)$ ガ

i) D ニ於テ x ヲ fix スレバ y ニツキ正則，y ヲ fix スレバ x ニツキ正則

ii) D ニ含マレル任意ノ compact set G デ $\|f(x, y)\| \leq M_G$ ナルトキ $f(x, y)$ ハ D デ正則トナル。

(証明) D ニ含マレル任意ノ点ヲ (x_0, y_0) トスル時，$R, S\ (>0)$ ヲ適当ニトレバ $\|x-x_0\| \leq R$，$\|y-y_0\| < S$ ハ D ニ含マレ，従ッテ此所デ $f(x, y)$ ガ正則ナル事ガ分レバ，(x_0, y_0) ハ任意デアルカラ $f(x, y)$ ハ D デ正則トナル。依ッテ一般性ヲ失フコトナク，$(x_0, y_0) = (0, 0)$ トシ，$f(x, y)$ ハ (T, T') (但シ $T: \|x\| < R$，$T': \|y\| < S$ ヲ表ス) デ各変数ニツキ正則デ，(T, T') 内ノ任意ノ compact set G デ $\|f(x, y)\| \leq M_G$ トスルナ $f(x, y)$ ハ (T, T') デ正則ナルコトヲ証スレバヨイ。

$f(x, y)$ ハ x ヲ fix スレバ y ニ付キ正則ナル故次ノ如ク展開サレル

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y)$$

ココニ $U_n(x, y)$ ハ y ニツキ n 次ノ斉次多項式トナル (斉次多項式ノ定義ハ才一号，17頁ヲ参照下サイ)

然エルニ今 y ヲ fix スレバ $\rho < \frac{S}{\|y\|}$ ナル ρ ヲトリ，円 C ヲ $|\alpha| = \rho$ デ表ハセバ

$$U_n(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x, \alpha y)}{\alpha^{n+1}} d\alpha \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

円 C 上ニ m ケノ点ヲ $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots \zeta_m$ ($\zeta_{m+1} = \zeta_1$ トオク) ヲトリ 弧 $\overset{\frown}{\zeta_i \zeta_{i+1}}$ 上ニ任意ノ点 γ_i $(i = 1, 2, \cdots m)$ ヲトリ

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{f(x, \gamma_i y)}{\gamma_i^{n+1}} (\zeta_{i+1} - \zeta_i)\right)$$

トオク。但シ $m \to \infty$ ナルトキ C ニ於テ
$\max_{1 \le i} |\zeta_{i+1} - \zeta_i| \to 0$ ナル様ニシテオク。然ルトキハ

i) $S_m(x)$ ハ T デ正則デアル。

ii) x ヲ T ノ任意ノ点トスルトキ

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = U_n(x, y)$$

iii) T ニ含マレル任意ノ compact set ヲ G_0 トスル。Cy ハ compact set ナル故 $G = (G_0, Cy)$ ハ D デ compact set トナル

故ニ M_G ガ存在シテ

$$\|f(x, \alpha y)\| \le M_G \quad (x \in G_0 \quad \alpha \in C)$$

$$\|S_m(x)\| \le \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{\|f(x, \gamma_i y)\|}{|\gamma_i|^{n+1}} |\zeta_{i+1} - \zeta_i| \le \frac{M_G}{\rho^n}$$

依ッテ定理 1 ニヨリ $U_n(x, y)$ ハ x ニツキ正則トナル
一 $U_1(x, y)$ ハ x ヲ fix スレバ y ニツキ linear トナルカラ Kerner ノ定理2) ニヨリ (x, y) ニツキ (T, E') デ連続トナル。故ニ定理 B ニヨリ (T, E') デ正則トナル　猶一般ニ

$$U_n(x, y) = \frac{1}{n!} \left[\delta^n f(x; y_1, y_2, \cdots, y_n) \right]_{y_1 = y_2 = \cdots = y_n = y}$$

$\delta^n f(x; y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ハ x ヲ fix シタトキ
$y_1, y_2, \cdots, y_n$ ニ付キ夫々 linear トナル
$y_1, y_2, \cdots, y_n$ ヲ fix スレバ $|\alpha_i| \le \rho \ (i = 1, 2, \cdots n)$ ナルトキ $\|\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n\| < \delta$ ナル様ニ ρ ヲ選ベバ、

$$\delta^n f(x; y_1, \cdots, y_n)$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2} \int_C \frac{d\alpha_2}{\alpha_2^2} \cdots \int_C \frac{f(x, \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)}{\alpha_n^2} d\alpha_n$$

(C ハ $|\alpha_i| = \rho$ ナル円ヲ表ハス)

$G = \underset{\substack{x \in G_0 \ |\alpha_i| = \rho \\ (i = 1, \cdots, n)}}{E} (x; \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)$ トオケバ G ハ compact set トナル。

故ニ M_G ガ存在シテ $\|f(x, y)\| \le M_G \ ((x, y) \in G)$ トナル

今 $f(x, \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)$ ニ於テ特ニ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ ヲ fix スレバ $U_1(x, y)$ ト同様ニシテ

$$\int_C \frac{f(x, \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n)}{\alpha_n^2} d\alpha_n$$ ハ x ニツキ

正則トナル　且ツ G デハ有界トナル。

次ニ α_{n-1} ニツイテ考ヘレバ

$$\int_C \frac{d\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}^2} \int_C \frac{f(x, \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)}{\alpha_n^2} d\alpha_n$$ ハ x ニツキ

regular トナル。以下之ヲ操返セバ $\delta^n f(x; y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ハ $y_1, y_2, \cdots\cdots y$ ヲ fix シタ時 x ニツキ regular トナル　今 $y_2, \cdots, y_n$ ヲ fix スレバ $\delta^n f(x; y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$ ハ x ニツキ regular デ y_1 ニツキ連續ナル故 Kerner ノ定理ニヨリ (x, y_1) ニツキ連續トナル。

次ニ $y_3, \cdots\cdots y_n$ ヲ fix スレバ (x, y_1) ニツキ連續デ y_2 ニツキ linear ナル故 Kerner ノ定理ニヨリ (x, y_1, y_2) ニツキ連續トナル　之ヲ操返セバ $\delta^n f(x, y_1 \cdots\cdots y_n)$ ハ $(x, y_1 \cdots\cdots y_n)$ ニツキ連續トナル。$y_1 = \cdots\cdots = y_n = y$ トオケバ $\delta^n f(x; y, \cdots\cdots, y)$ 乃チ $U_n(x, y)$ ハ (x, y) ニツキ (T, E') デ連續トナル 從ッテ定理 B ニヨリ $U_n(x, y)$ ハ (T, E') デ正則トナル

次ニ $(T \cdot T')$ ニ含マレル任意ノ compact set ヲ G トスル。G ノ T, T' ヘノ project ヲ夫々 G_0, G_1 トスレバ G_0, G_1 ハ夫々 $T\ T'$ ニ於ケル compact set トナリ、$\max_{y \in G_1} \|y\| = \rho < S$ トナル。

C ヲ $|\alpha| = \rho$ $\left(1 < \rho < \frac{S}{\delta}\right)$ ナル円トスレバ $C \times G_1$ ハ又 T' ノ compact set トナル。故ニ $G' = (G_0, C \times G_1)$ トオケバ G' ハ (T, T') デ compact set トナル

然ルトキハ $M_{G'}$ ガ存在シテ

$$\|f(x, y)\| \leq M_{G'} \qquad (x, y) \in G'$$

一方 $G \subset (G_0, G_1)$ ナル故 $(x, y) \in G$ ナルトキ

$$U_n(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(x, \alpha y)}{\alpha^{n+1}}\, d\alpha \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$\| U_n(x, y) \| \leqq \frac{M_G}{\rho^n}$$

故ニ $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, y)$ ハ G デ一様収斂スル。

G ハ任意ナル故ニ $f(x, y)$ ハ (T, T') デ正則トナル。

$\boxed{\text{系}}$ $f(x, y)$ ハ $E \times E'$ ノ領域 D デ定義セラレ E' ノ値ヲトルトキ

i) D デ x ヲ fix スレバ y ニツキ正則，

y ヲ fix スレバ x ニツキ正則

ii) $(x, y) \in D$ ナルトキ常 $\|f(x, y)\| \leqq M$

ナルトキ $f(x, y)$ ハ D デ正則トナル。

[註 2] 定理 1 ノ証明ニ定理 A ヲ用ヒマシタガ，之ハ次ノ Lemma ヲ用ヒ直接証明出来マス．

Lemma. $\{U_n(x)\}$ ハ E デ定義セラレ E' ノ値ヲトル p 次ノ homogeneous polynomial トスルトキ E ノアル点 x_0 ノ近傍デ $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$ ガ存在スレバ $U_n(x)$ ハ E デ p 次ノ homogeneous polynomial $U(x)$ ニ収斂スル。

(A, E, Taylor 氏ハ定理 A ヲ用ヒ，"$U_n(x)$ ガ E デ収斂スルトキ $U(x)$ ニ収斂スル" 事ヲ証明シテ居リマスガ，Lemma ハ唯一点ノ近傍ダケデ収斂スレバ良イノデスカラ条件ハユルクナッテ居リ，且直接容易ニ証明出来マス。) 一般性ヲ失ハズニ $T(\|x\| < R)$ デ $f(x)$ ガ正則ナル事ヲ証明マル。

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} U_{np}(x), \quad U_{np}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_n(\alpha x)}{\alpha^{p+1}}\, d\alpha$$

$$\left(C: |\alpha| = \rho, \quad 1 < \rho < \frac{R}{\|x\|}\right)$$

$\{U_{np}(x)\}$ ハ p 次ノ斉次多項式デアル。x ヲ fix スレバ $\alpha x\ (\alpha \in C)$ ノ compact set トナル故アル M ガ在リ，$\|f_n(\alpha x)\| \leqq M \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$

$$\therefore \quad \|f_n(\alpha x) - f_m(\alpha x)\| \leqq 2M$$

$$\|U_{np}(x) - U_{mp}(x)\| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f_n(\alpha x) - f_m(\alpha x)\| \, d\theta$$

故ニ Lebesgue ノ定理ニヨリ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \|U_{np}(x)-U_{mp}(x)\| \le 0$

E' ハ complete ナル故 $\lim_{n\to\infty} U_{np}(x) = U_p(x)$ トオケバ $U_p(x)$ ハ Lemma ニヨリ p 次ノ homogeneous polynomial ナル。又 T 内ノ任意ノ compact set G ニ於テ $\|f_n(x)\| \le M_G$ ナル故ニ $1 < \rho$ ガ存在シ、

$$\|U_{np}(x)\| \le \frac{M_G}{\rho^p} \qquad \|U_p(x)\| \le \frac{M_G}{\rho^p}$$ トナル。

依ッテ、$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} U_p(x)$ トナリ G デ一様収斂スル。且 $f(x)$ ハ T デ正則デアル。

—以上—

1) A. E. Taylor : On the properties of analytic functions in abstract spaces Math. Ann. 115, (1938)

2) M. Kerner : Zur Theorie der impliziten Funktional-operation. Studia Math. T. III (1931) コノ論文デ"$f(x, y)$ ガ x ニツキ連續デ y ニツキ linear ナルトキ $f(x, y)$ ハ (x, y) ニツキ連續トナル"事ヲ証明シテアリマス。