16 ~~12.~~ アル continuum ノックル空間

井関清志（阪大）
(1946. XII 9 受付)

continuum ニ関スル問題ト indecomposable continuum ノツクル hyperspace ニ一ミノ結果ヲ生シタノデ, ソレヲ中心ニシテ述ベテミヨウ。

§1. hyperspace

n-dim. Euclid space ニアル固定シタ bounded continuum (closed connected set) ヲ C トスル。C ノスベテノ subcontinuum (空集合ヲ除ク) ヲ element トスル space $\mathcal{E}$ ニ次ノ metric ヲ導入スル。即チ $\mathcal{E}$ ノ二点 A. B ノ距離 $\rho^*(A\cdot B)$ ヲ

$$\rho^*(A\cdot B) = \mathrm{Max}\left(\sup_{x\in A} \rho(x\cdot B),\ \sup_{y\in B} \rho(A\cdot y)\right)$$

コヽニ ρ ハ元ノ空間ノ metric トスル。コノ ρ^* ニ関シテ $\mathcal{E}$ ハ metric space ヲ作ル。コノ $\mathcal{E}$ ヲ C ノ hyperspace. トイフ。

$\boxed{\text{定理 1.1.}}$ $\mathcal{E}$ ハ ρ^* ニ関シテ complete metric space ニナル。又 ρ^* ニ関シテ $\mathcal{E}$ ハ bicompact ナ arc-wise connected ノ continuum ヲ作ル。

(証明) C ノスベテノ closed subset ノ作ル space ハ ρ^* ニ関シテ complete metric space ヲツクル。[1] 次ニ $\mathcal{E}$ ノ Cauchy sequence $\{A_n\}$ $(n=1\cdot 2, \cdots\cdots)$ ヲトレバ, ρ^* ニ関シテ A_n ハ空デナイ一ツノ closed set ニ収斂スル。[2] コレヲ A トスレバ, A_n ハ A ニ集合系列収斂シテヰルカラ, A_n ガスベテ continuum デアルカラ, A ガ亦 continuum ニナル。[3] 即チ $\mathcal{E}$ ハ complete space ニナル。ソノ他ノ諸性質ハ S. Mazurkiewicz ト K. Borsuk[4] ノ論文ノ中ニ含マレテヰルカラ略サウ。

$\boxed{\text{定理 1.2}}$ $\mathcal{E}$ 内ノ closed set $\mathfrak{A}$ ニ対シテ $\mathfrak{A}$ ノスベテノ A ヲ C 中ノ continuum トシテ

$$H = \sum_{A\in\mathfrak{A}} A$$

---

1) H. Hahn ; Reell Funktionen (1932) p 124

2) H. Hahn ; loc cit.

3) K. Menger ; Kurventheorie (1932) p.50

4) S. Mazurkiewicz et K. Borsuk ; C.R. de Varsovie 24 (1932) p.149

トオケバ、H ハ C ノ closed subset ニナル。(コノ H ヲ $\mathfrak{A}$ ノ C ヘノ projection トイフ。) 又 $\mathfrak{A}$ ガ continuum ナラバ H ハ C ノ subcontinuum ニナル。

(証明) H ガ closed set ニナルコト。若シ H ガ closed set デナケレバ、

$$H \not\ni p \qquad \bar{H} \ni p$$

ナル p ガアル。p ヲ中心トスル半径 $\frac{1}{n}$ ノ sphere $U_n(p)$ ヲトレバ $U_n(p) \cdot H \neq 0$ カラ $U_n(p) H \ni p_n$ ヲトレバ p_n ヲ含ム $\mathfrak{A}$ ノ点ガアル。即チコレヲ A_n トスレバ、$\mathfrak{A}$ ノ bicompactness ニヨリ、A_n ノ subsequence A_{n_i} $(i=1,2,\cdots)$ デ C ノ subcontinuum A ニ収斂スルモノガアル。p_{n_i} $(i=1,2,\cdots)$ ハ亦 p ニ収斂スルカラ、$A \ni p$ デナケレバナラヌ。故ニ $A \in \mathfrak{A}$ ヨリ $p \in H$ トナリ、コレハ不合理。

$\mathfrak{A}$ ガ continuum ノトキ H ガ continuum デナケレバ H ハ二ツノ空デナイ disjoint ナ closed set ニ separate スル。コレヲ A, B トスレバ $\rho(A,B)>0$ デ [illegible] 属スル。$\mathfrak{A}$ ノスベテノ点ヲ $\mathfrak{A}_A$ 然ラザル $\mathfrak{A}$ ノ点ヲ $\mathfrak{A}_B$ トスレバ $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_A + \mathfrak{A}_B$ トワカシテ $\rho^*(\mathfrak{A}_A, \mathfrak{A}_B)>0$ トナル。即チ $\mathfrak{A}$ ノ連絡性ニ反スル。

$\boxed{\text{定理 1 3}}$ C ノ任意ノ connected subset A ノ各点ニ対デスル $\mathfrak{E}$ ノ各点ノ作ル $\mathfrak{E}$ ノ subset ノ closure ハ $\mathfrak{E}$ ノ subcontinuum ヲ作ル。コノ定理ハ今必要ナイカラ証明ヲ略シテオカウ。

§2. perfectly indecomposable continuum

continuum C ガ C ノ proper subcontinuum ノ二ツノ和デ表ハサレナイトキ、C ヲ indecomposable continuum トイヒ、C ノスベテノ subcontinuum ガ indecomposable ノトキ C ヲ perfectly indecomposable トイフ。[51]

$\boxed{\text{定理 2.1}}$. C ガ perfectly indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分ナル条件ハ、C ノ任意ノ二ツノ subcontinuum $A.B$ ヲトレバ、

51) C. Kuratowski et Z. Janiszewski, F.M. vol 1 B. Knaster F.M. vol 3

A B ガ [illegible] ノ [illegible] A C B
ノ何レカ一ツガ成立スルコト。即チ $A-B \neq 0 \neq B-A$ ナル subcontinuum A. B ガ存在シナイコト。

（証明） 必要ナコト　モシ $A-B \neq 0 \neq B-A$ ナル subcontinuum A, B ガアレバ $A+B$ ハ C ノ一ツノ subcontinuum デ decomposable デアル。コレハ不合理。
充分ナコト。モシ C ガ D ナル decomposable continuum ヲ含メバ D ハ D ノ proper subcontinuum A. B ノ和デ表ハサレルカラ，$A-B \neq 0 \neq B-A$ トナル。　（終）

A. B ヲ disjoint ナ集合，M ヲ continuum トスル時 $MA \neq 0 \neq MB$ 且 M ノ proper subcontinuum ハ A B ノ点ヲ同時ニ含マナイトキ M ハ A ト B トニ関シテ atomic デアルトイフ。[6] M ガ bounded continuum ヲ A. B ガ disjoint ナ closed subset トスレバ，M ハ A, B ニ関シテ atomic continuum ヲ含ム。[7]

$\boxed{\text{定理 22}}$ C ガ bounded perfectly indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ C ヲ disjoint ナ subcontinuum A, B ニ関スル atomic continuum ガ A, B ヲ同時ニ含ムコトデアル。シカシ斯様ナ atomic continuum ハ unique ニ決マル。

（証明） 必要ナコト。前定理ヨリ明カ。充分ナコト。C ガ decomposable continuum D ヲ含メバ，前ト同ジ様ニ，$D=H+K$ トカケル。$H \ni a$. $K \cdot a = 0$ ナル a ヲトレバ a ト K ニ関スル atomic continuum ヲ H ガ含ムカラ[7] コレハ假定ニ反スル。　（終）

§3. indecomposable continuum ノ hyperspace

§§ 1.2 ノ結果ヲ用ヰテ indecomposable continuum ソノ hyperspace ノ関係ヲ述ベヨウ[8]
indecomposable continuum ハ Kuratowski - Janiszewski

---

6) R.L. Moore: pt. set theory (1932) p.18

7) R.L. Moore: Loc. cit p.21. (Th. 34)

8) 本 § ニ関シテハ [illegible] Kelley ノ Trans. A. M. S (1942) 参照

ガ左シ如キ様ニ composant decomposition サレル。即チ

$$C = \mathfrak{p}(a, C) + \mathfrak{p}(b, C) + \cdots\cdots$$

$$\mathfrak{p}(a, C),\ \mathfrak{p}(b, C) = 0 =$$

ココニ $\mathfrak{p}(a, C)$, …… ハ所謂 semi-continuum. シカモ composant ハ稠密デアル。[9]

$\boxed{\text{定理 3.1}}$ $\mathfrak{p}(a, C) \equiv \mathfrak{p}(b, C)$ ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ a ト b トガ $\mathcal{E}$ ヨリ点 C ヲ除イタ空間 $\mathcal{E}-C$ デ arc-wise ナルコト

(証明) $\mathfrak{p}(a, C) \equiv \mathfrak{p}(b, C)$ ナラバ a ト b トハ C ノ proper subcontinuum D デ結ベルカラ, a ト D トハ $\mathcal{E}$ 内デ C ヲ通ラナイ様ニ結ベル。又, b ト D トハ C ヲ通ラナイ様ニ simple arc デ結ベル。[10] 即チ, a ト b トハ $\mathcal{E}$ 内デ C ヲ通ラナイ simple arc デ結ベル。逆ニ a ト b トガ $\mathcal{E}-C$ 内デ simple arc デ結ベタトスレバ, コレハ $0 \leq t \leq 1$ ノ位相的ナ像デアル。即チ, 一価連續函数 $x(t)$ ガ存在シテ,

$$a = x(0),\quad b = x(1),\quad C_t = x(t) \neq C\ (0<t<1)$$

ナキナッナルトキ $C_a \neq C_b$ デアル

ニ対シテ $C_t \subset \mathfrak{p}(a, C)$ ヲ言ヘバヨイ。モシ $C_t - \mathfrak{p}(a, C) \neq 0$ トスレバ ニノ C_t ハニツノ composant ノ共通点ヲ持ツ。ソレ故ニ, composant ノ性質カラ $C_t = C$ トナラ来バナラヌ。スベテノ t ニ対シテ $C_t < \mathfrak{p}(a, C)$ 即チ $b \in \mathfrak{p}(a, C)$ 従ッテ $\mathfrak{p}(a, C) \equiv \mathfrak{p}(b, C)$。

$\boxed{\text{定理 3.2}}$ C ガ indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分條件ハ $\mathcal{E}-C$ ガ arc-wise デナイコト。

(証明) $\mathcal{E}-C$ ガ arc-wise ナラバ, 定理 3.1 ニヨリ composant ハ唯一ツニナル。コレハ, 少ナクトモニツ以上アルコトニ反スル。逆ニモシ C ガ decomposable ナラバ, $C = A + B$ ナルニツノ proper subcontinuum A. B デアルカラ, A ト B トハ C ヲ通ラナイ様ニ simple arc

---

9) Kuratowski - Janiszewski F.M. vol 1. S. Mazurkiewicz F.M. vol 10
10) Mazurkiewicz et Borsuk loc cit

デ結ベル $\mathcal{E}-\mathcal{C}$ 内ノ任意ノ点ガ A ヲ、$\mathcal{D}$ ト $\mathcal{E}-\mathcal{C}$ 内デ simple arc デ結ベルコトニナル。即チ、$\mathcal{E}-\mathcal{C}$ 内ノ二点ハ simple arc デ結ベル コレハ不合理.

定理 2.3　C ガ perfectly indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ、C ノ hyperspace $\mathcal{E}$ ガ acyclic ナルコト

(証明) 充分ナコト。C ガ perfectly indecomposable デナケレバ、C ハ decomposable continuum D ヲ含ム。$D=A+B$ トカケルカラ、A ト B トハ D ヲ通ラナイ様ニ simple arc デ結ベル。A ト D トハ B ヲ通ラナイ様ニ B ト D トハ A ヲ通ラナイ様ニ、simple arc デ結ベル。コレハ $\mathcal{E}$ ガ simple closed curve ヲ含ム事ニナリ、acyclic ナルコトニ反スル。

必要ナコト。$\mathcal{E}$ ノ二点 A・B ガ $A\subset B$ ナルトキ、A, B ヲ結ブ simple arc ヲ $\{C_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$、$C_0=A$, $C_1=B$ トスル。$\{C_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ ノ C ヘノ projection ヲ H トスレバ、H ハ定理 1.2 ニヨリ、continuum ニナル。故ニ H ノ indecomposable [illegible] ハ H ヲ通ラズニ simple arc デ結ベル。又、H ヲ a トスレバ、$a\in C_t$ ナル C_t ガアルカラ、a ト C_t トハ H ヲ通ラナイ simple arc デ結ベル。結局定理 3.2 ニヨリ、H ガ decomposable デナケレバナラヌ。故ニ A ト B トヲ結ブ arc ハ必ズソノ arc ノ projection デアル continuum ノ点ヲ通ル。故ニ、スベテノ t ニ対シテ、$C_t\subset B$ デアル。モシ B ガ H ノ proper subcontinuum ナラバ、$A\subset B$ ナル故ニ H ヲ通ラナイ arc ガアルコトニナル。コレハ不合理。依ッテスベテノ C_t ニ対シテ $C_t\subset B$。次ニスベテノ C_t ハ A ヲ含ムコトヲ証明スル。A ヲ含ム $C_t\ (0\leqq t\leqq \alpha)$ ノ全体ノ C ヘノ projection ノ closure ハ C_α ニ一致スル。モシ C_α ニ一致シナケレバ、A ヲ含ム更ニ他ノ $C_t\ (0\leqq t\leqq\alpha)$ ガ見出サレル。故ニ、$A\subset C_\alpha$、故ニ C ノ perfect ヨリ、$\{C_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ ハ inclusion ニ関シテ [illegible] 全ル A ヲ含ミ B ニ含マ

レルスベテノ subcontinuum ハ $\mathfrak{C}$ ノ hyperspace ナルコトヨリ A ト B ヲ結ブ simple arc ヲ作ッテヰル。故 $\{C_i\}$ 系列ノ arc ニ一致セネバナラズ。又 A, B ガ $AB=0$ ナル C ノ subcontinuum ナラバ、A・B ニ関スル C ノ atomic continuum ヲトレバ、定理2.2 及上ノ事項ニヨリ A ト D, D ト B ヲ結ブ arc ガ唯一ツノ A, B ヲ結ブ arc ニナル。　(終)

特ニ注意スベキハ、Euclid 平面ノ単位正方形 S ニ関スル hyperspace Σ 内デ、S 内ニアル perfecty indecomposable continuum ノ集ハ、2nd category ニナク[12] decomposable continuum ノ集ハ、1st category ノ集合ヲ作ッテヰル。(コノ後者ノ事実ハ容易ニ証明サレルコトデアルガ) 然ルニ一方 S 内ノ Jordan continuum 全体ハ Σ 内デ dense ナ集合ヲ作ッテヰル (コレハ任意ノ continuum ヲトレバソレガ Jordan continuum ノ可少列極限デ表ハサレルト云フコトカラ知ラレル。)

---

11) S. Mazurkiewicz ; F.M. vol 14 pp 172-3

12) S. Mazurkiewicz ; F.M. vol 16 p. 158.