18 ~~14~~. Hahn-Sakoノ定理ニツイテ

洲之内源一郎（東北大）
（1946, XII 12 受付）

Hahn-Sakoノ定理ト
空間Mノ可測集合E 全体ヲ$\mathfrak{M}$、且ツ$\mu(M)<\infty$トスル$F_n(E)$ヲ$\mu(E)$ニ関シテ完全加法的且絶対連續（c.a., a.c.）ナ集合函數トスルト
$\lim_{n\to\infty} F_n(E)=F(E)$ガ$\mathfrak{M}$ノ凡テノ集合ニツイテ存在スレバ、$F_n(E)$ハ一様ニ絶対連續 従テ$F(E)$モc.a., a.c.トナル。

コノ定理デ$\mu(M)=+\infty$ナル時モ定理ガ成立スルコトヲ注意シタイ。コノ事カラBanach空間(l)デハ弱收斂ト強收斂ガ一致スルト云フ。I. Schurノ定理ガ殆ンド明カナ問題トナル。

(1) 先ヅ $M=\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, $\mu(M_n)<\infty$ ノ場合
$E\in\mathfrak{M}$ トスレバ

$$E=\sum^{\infty} E M_n \qquad \nu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(E M_n)}{2^n(\mu(M_n)-1)}$$

トオイテ測度ヲツケカヘルト，$\nu(M)<\infty$，且ツ $\nu(E)$ ハ $\mu(E)$ ニ関シテ a.c トナル。又 $F_n(E)$ ハ $\nu(E)$ ニ関シテ a.c. ナルコトモ明カデアルカラ Hahn-Saks ノ定理ヲ $\nu(M)<\infty$ ニ適用シテ次ノ定理ヲ得ル，

$\boxed{\text{定理 I}}$ $F_n(E)$ ハ一様ニ絶対連續 ソノ意味ハ $\varepsilon>0$ ニ対シ δ ト n_0 ガ定リ，$\mu(E, M_i)\leqq\delta$ $i=1,2,\cdots m_0$ ナラバ，$|F_n(E)|<\varepsilon$，$n\geqq n_0$ トナル。

従ッテ $F(E)$ ハ a. c. 且ツ c. a デアル。

コレカラ例ヘバ $(-\infty, +\infty)$ ニ於ケル L ニツイテ弱完備性ナ，弱 Compact ノ條件等ヲ論ズルコトガデキル

$\boxed{\text{系}}$ (l) デハ弱收斂ナラ，強收斂トナル．(I. Schur)

(証) $(l)\ni\{x^{(n)}\}=\{a_1^{(n)}, a_2^{(n)} \cdots a_i^{(n)}\}$ ガ弱收斂スルタメノ~~必要~~充分條件ハ

(1) $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i^{(n)}|\leqq M.$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in E}a_i^{(n)}$ ガ存在スル（ここニ E ハ自然数列ノ任意ノ arbitrat）

(2) ノ條件ヲ変化シヨウ ソレニハ自然數ノ集合 E ヲ考ヘ各數ニ測度 1 ヲ與ヘルト $\mu(E)$ ハ (i) ノ條件ヲ満タスカラ（定理 I）ニヨリ

$$n>n_0 \text{ ナラバ } \sum_{i=K_0}^{\infty}|a_i^{(n)}|<\varepsilon$$

従ッテ $\{a_i^{(n)}\}$ カラ 0 ニ弱收斂ナラバ

$$\lim_{n\to\infty}a_i^{(n)}=0 \quad i=1,2. \qquad \text{且ツ} \sum_{i=K_0}^{\infty}|a_i^{(n)}|\leqq\varepsilon,$$

即チ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i^{(n)}|=0$ 強收斂トナル，

(ii) $\mu(M)=\infty$ デ (i) ノ條件ノナイ場合

$\nu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n(E)}{2^n[V_n(M)+1]}$ $V_n(E)=F_n(E)$ ノ全変分トオクト $\nu(E)<\infty$ 且ツ $\nu(E)$ ハ $\mu(E)$ ニ関シテ a. c. トナル又 $F_n(E)$ ガ $\nu(E)$ ニ関シテ a. c ナルコトモ明カデアルカラ $F_n(E)$ ハ $\nu(E)$ ニ関シテ一様ニ a. c. 従ッテ $\mu(E)$ ニ関シテモ一様ニ a. c，即チ $F(E)$ ハ a. c. 且ツ c. a. デアル

コノ場合，$F_n(E)$ ハ積分デ表サレナイカラ ∞ ノ測度

ノ部分ガ一様ニ小サクナルト云フ事ガイヘナイ。

又コノ時ニハ不定積分列ト$F_n(E)$トハ必シモ一致シナイカラ不定積分列ノ極限ハ如何ト云フ問題ガ起ルカ　コノ時ハ $\int_M f_n(x)dx$ ニ対シテ $E_x(f_n(x)\neq 0)$ ダケヲ考ヘレハヨイカラ (iii) ノ場合トナル

従ッテ不定積分ノ列ガ凡テノ可測集合ノ上デ収斂スレハ　不定積分デアル。