20. 多連結領域ノ等角寫像ニ就テ

遠木幸成 (阪大)

(1946. XII. 16 受付)

多連結領域ノ等角寫像ニ關スル T. Radó ノ一定理 (Acta Szeged II) ヲ先ヅ擴張シマス。

[定理] $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_p$ ヲ境界ノ成分ニモツ p 重連結領域ヲ D_0 トス。D_0 ノ眞部分領域 D_1 ガ次ノ i) ii) ノ條件ヲ滿足スルナラバ D_0 ヲ D_1 ヘ一対一等角ニ寫像スルコトハ出來ナイ。

i) D_1 ノ餘集合ノ各成分ハ少クトモ一ツノ Γ_i ヲ含ム。

ii) $p=2$ ナルトキハ Γ_1, Γ_2 ハ共ニ少クトモ二点ヲ含ム

(證明) 若シ D_0 ヲ D_1 ヘ一対一等角ニ寫像スル函數 $f_0(z)$ ガアッタトスル。$f_0(f_0(z)) = f_1(z)$ 一般ニ $f_0(f_{n-1}(z)) = f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots,)$ トスレバ、條件 i) ii) ニヨリ $\{f_n(z)\}$ ハ D_0 デ正規族ヲナス。故ニ一樣收斂スル部分函數列 $f_{n_\nu}(z)$ ガ存在スル，コレヲ

簡單ニスル為ニ $f_\nu(z)$ トカワコトニスル。D_0 ノ $f_\nu(z)$ ニヨル像領域ヲ D_ν トシ，$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z) = f(z)$ トスレバ $f(z)$ ハ常數デハナイ　何トナレバ，先ヅ $p=2$ ナルトキハ Γ_1 或ハ Γ_2 ヲ内部ニ含ム如キ D_0 内ノ Jordan 閉曲線ノ $f_\nu(z)$ ニヨル像曲線ハ D_ν ノ一ツノ境界ヲ内部ニ含ム。亦 $p>2$ ナルトキハ只一ノノ Γ_i ヲ内部或ハ外部ニ含ミ互ニ交ハル如キ Γ 個ノ Jordan 閉曲線ノ像曲線モ D_ν ニ關シテ同ジ關係ニアル。コノ事ヨリ一ツノ常數 K ガ存在シテ $\max_{z'z''\in D_0} |f_\nu(z')-f_\nu(z'')| \geqq K$ ガ成立スル。從ッテ $f(z)$ ハ常數デハアリ得ナイ。

故ニ $f(z)$ ハ一價正則ナル故ニ D_0 ノ $f(z)$ ニヨル像 D ハ領域デアリ，從ッテ開集合デアル。シカモ $D_{\nu-1} \supset D_\nu$，$D_\nu \supset D$ ナルコトハ明ラカデアル。今 $z_0 \in D_0$，$Z_0 \bar{\in} D$ ナル如キ z_0 ヲトリ，$f_\nu(z_0) = z_\nu$ 及ビ $f(z_0) = Z$

ゴトハ明ラカデアル　亦　$z_\nu \to Z$ ナルコトヨリ。Z ハ D ノ境界点デナケレバナラヌ。コレハ矛盾デアル。（証了）

尚コノ定理ハ無限多連結領域デモ成立ノ

次ニ T. Radó ハ Acta Szeged I デ多連結領域（三重連結以上）ヲソレ自身ニ等角寫像スル一價 $p\,(p \geqq 2)$ 葉函數ハ存在シナイコトヲ証明シテヰルガ等角寫像ノカワリニ内部變換デモ成立ツコトヲ証明シヨウ。

$\boxed{\text{定理}}$　n 重連結領域 D $(n \geqq 3)$ ヲソレ自身ニ寫像スル一價 p 葉ナ内部變換ハ存在シナイ。但シ $p \geqq 2$ トス。

（証明）領域 D ヲ Grundfläche トシ，p 葉ノ Überlagerungsfläche ヘ位相寫像シタトスレバ D ノ Euler 指數 ρ_0 ト Überlagerungsfläche ノ Euler 指數 ρ トハ等シイ。然ルニ Hurwitz ノ關係式ニヨリ $\rho = p\rho_0 + \nu$，但シ ν ハ Überlagerungsfläche ノ分岐点ノ分岐次數ノ總和ヲ表ハス。

然ルニ $\rho_0 = n-2$ デアル。從ッテ $\rho = n-2$ デアル

故ニ　$n-2 = p(n-2) + \nu$　　$n-2 \geqq (n-2)p$

コレハ $p \geqq 2$ ナルトキハ矛盾デアル。　（証了）