

25. Geodesic Space, に就て (1)

工藤達二 (阪大)

1. Riemann space に於ける geodesic line の研究 特に in the large の研究は K. Menger⁽¹⁾ に初まる metric method によるのが好都合なことが多い。

こゝでは geodesic space 及び geodesic mapping の一般的性質を追求する。

geodesic space (略して g. s.) は Riemann space の geodesic distance による metric を抽象化したもので、あらゆる complete な Riemann space を含む。

geodesic mapping (略して g. m.) には、二つの g. s. の一方から他方への betweenness-relation を保存する mapping であつて、isometric mapping, covering mapping, isometric-motion (autometric) 等を含むものであり興味ある問題は豊富であるが、その解決は中の困難なる故、それは論文の随所に於て問題として今は 測地距離批判を乞ふことにする。

2. Geodesic Space の定義

g. s. Ω は次の axiom⁽²⁾ (A-C) によつて規定される。

(A) Ω は finitely compact (bounded set is compact) なる metric space

(B) $\Omega \ni \forall p, q$ に対し p, q の middle point m が少くとも一つ存在する : $pm + mq = pq, pm = mq$ (*)

(1) Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Ann. 100.

(2) Trans. Amer. Math. Soc. vol. 54

この公理群は独立性を欠くこと甚しいものであるが本論ではかかる点には重点をおかない故、こゝには立入らない。

(*) Ω 内の二点 p, q の距離を pq で表はす, 又混同の起あるときは $\rho(p, q), r(p, q)$ 等の記号を用ひる.

(C) $\forall p (p \in \Omega)$ に対し正数 $d(p)$ が対応し $S(p, d(p))^{(3)}$ $\exists q, r$ に対して *middle point* m は只一つ, 又只一つの $n \in \Omega$ があつて q は n, r の中点となる.

(C) に於て正数 $d(p) = \infty$ としたとき (A-C) を満す g, d を H. Busemann⁽⁴⁾ に従つて *s.l. space* と名付ける.

(A-C) よりの基本的結論を得るために次の諸定義をなす, R^1 の *segment* の Ω 内への *isometric image* を *segment* と云ふ, Ω 内 C が a と b との間にあるとは, $aC + CB = ab$ なることを云ふ,

$-\infty < s < +\infty$ の Ω 内の *locally isometric mapping* $g(s)$ を *geodesic line* と云ふ.

二つの *geodesic line* $g(s), h(s)$ は $g(s+a) = h(s)$ 又は $g(-s+a) = h(s)$ がある定数 a に対し成立つとき, 同位位のと見做す.

geodesic ray $g(s)$ とは $\alpha \leq s < +\infty$ の Ω 内への *locally isometric mapping* g (二つの *geodesic ray* が同じものを表はすとは *geodesic line* の場合と同様に定義する).

次に *segment* σ が *geodesic line* $g(s)$ に含まれるとは σ がある $s_1 < s_2$ に対して $g(s): s_1 \leq s \leq s_2$ で表はされることをする.

かく定義するとき次の基本的諸事項が成立つ.

(2.1) 任意の Ω の二点 p, q は *segment* (\overline{pq} とかく) に結ばれる, 何者: $pq = a$ として (B) により $p_0 = p, p_a = q, p_{\frac{a}{2}}$ は p_0, p_a の中点, $p_{\frac{a}{4}}$ は $p_0, p_{\frac{a}{2}}$ の中点, $p_{\frac{3a}{4}}$ は $p_{\frac{a}{2}}, p_a$ の中点... とするとき一般に $p_{\frac{ka}{2^k}}$ ($k=0, 1, 2, \dots; k=0, 1$

... 2.) 左の点が定義出来且つ $\frac{h}{2k}a \rightarrow P_{\frac{h}{2k}}a$ は isometric である。(A)によりてこれは $\langle 0, a \rangle$ の Ω 内への isometric mapping に拡張出来る。

(3) P を中心とし $d(P)$ を半径とする法の内部

(4) H. Poincaré は主に幾何学基礎論のために d, h, spruce と用いてゐる。例へば Math. ann. 107.

又 (C) を用ひれば

(2.2) $S(P) = S(P, \frac{d(P)}{k})$ を P の標準近傍と名付ければ

$S(P)$ の二点 P_1, P_2 に対しては P_1, P_2 を結ぶ segment は R 一つ。又 R 一つの q があつて q, P_2 を結ぶ segment は R 一つ。且つ P_1 は q, P_2 の中点となる。

(2.3) 任意の segment は R 一つの geodesic line に含まれる。

3. $g. d.$ の次元.

(3.1) 先づ Ω がその一点 P に $\dim_P \Omega^{(5)} = 1$ なら Ω は $-\infty < P < +\infty$ の isometric image である。

何故: $q \in \Omega$ を P と結ぶ segment の定める geodesic line を $g(s)$ とする。($g(0) = P$ としておく)

$g(s)$ の $S(P)$ との交わり $g(\frac{d(P)}{3}), g(-\frac{d(P)}{3})$ の定める segment を σ とすれば $\overline{S(P)} = \sigma$ である。

何と云へば $\overline{S(P)} = \sigma \ni P_1$ があれば $P_1 \times \sigma^{(6)}$ は P に於て二次元となる。

故に Ω は P の充分近くで一次元である。

今 $0 \leq s \leq s'$ で $\dim_{g(s)} \Omega = 1$ なら s' の上端を S_0 とすれば $S_0 = +\infty$ である。

☺ もし $S_0 < +\infty$ なら $g(s)$ で P に於けると同様の議論をすれば容易に矛盾に導かれる。

故に $q \in g(S)$ に於ても $\dim_q \Omega^* = 1$.

Ω に $g(0)$ 以外の点が含まれないこと、 $g(S)$ が自分自身に交わらないことは明らかである。

(5) *menger* の *dimension*

(6) $\overline{P, \alpha}$, $\alpha \in \mathcal{O}$ の和集合 (cone).

(3.2) $S(P, \varepsilon)$ は ε が充分小なるとき且いに *homeomorphic* である。 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{d(P)}{3}$ とし

何者: $\dot{S}(P, \varepsilon_2) \ni q_2$ と P とを結べば $\dot{S}(P, \varepsilon_1)$ と只一点 $q_1 = \dot{S}(q_2)$ と交はる。

今 $q_2^{(v)} \rightarrow q_2$ とすれば $q_1^{(v)} = \alpha(q_2^{(v)})$ は (A) により集積点をしつたの任意の一つを q_1^0 とすれば $pp_1^{(v)} + p_1^{(v)} p_2^{(v)} = p p_2^{(v)}$,
 $pp_1^{(0)} = \varepsilon_1$ ($v = 1, 2, \dots$) なる故 $pp_1^{(0)} + p_1^0 p_2 = p p_2$,
 $pp_1^{(0)} = \varepsilon_1$

而るに $q_1 = \alpha(q_2)$ は最後の等式を充す只一つの点なる故 $q_1^0 = q_1$ 故に α は連続又一対一なることも明らかなる故 $S(P, \varepsilon_2)$ の *compact* 性より $S(P, \varepsilon_1)$, $S(P, \varepsilon_2)$ は *homeomorphic* である。

(3.2) により $\dim_p^* \Omega = \dim_p S(P, \varepsilon) + 1$
(ε 充分小)

が可能となる。

(3.4) $\dim_p^* \Omega \geq \dim_p \Omega$ なることは明らか。

次に $\dim_p^* \Omega = \text{const. over } \Omega$ なることを云ふ。

(3.5) [定理] $\exists p \in \Omega$ して $\dim_p^* \Omega = n$ なら
 $\forall q \in \Omega$ して $\dim_q^* \Omega = n$

(証明) P, q を通る *geodesic line* を $g(S)$ とする
($g(0) = P, g(a) = q$)。

すると $g(S): 0 \leq S \leq a$ は *compact* なる故 一定の ε に

対して $\dim_{g(s)}^* \Omega = \dim \dot{S}(g(s), \varepsilon) + 1$ となる。

先づ $0 \leq s < \frac{\varepsilon}{2}$ に対して $\dim_{g(s)}^* \Omega = \text{const.}$ である。

$$\textcircled{2} \quad \overline{S(p, \varepsilon)} \supset \overline{S(g(s), \frac{\varepsilon}{2})}, \quad \overline{S(p, \frac{\varepsilon}{2})} \subset \overline{S(g(0), \frac{\varepsilon}{2})}$$

$$\text{なる故} \quad \dim_p^* \Omega \begin{cases} = \dim \dot{S}(p, \varepsilon) + 1 \stackrel{(8)}{=} \dim \overline{S(p, \varepsilon)} \geq \dim \overline{S(g(0), \frac{\varepsilon}{2})} \\ = \dim \dot{S}(p, \frac{\varepsilon}{2}) + 1 = \dim \overline{S(p, \frac{\varepsilon}{2})} \leq \dim \overline{S(g(0), \frac{\varepsilon}{2})} \end{cases}$$

$$= \dim \dot{S}(g(0), \frac{\varepsilon}{2}) + 1 = \dim_{g(s)}^* \Omega$$

$$= \dim \dot{S}(g(s), \varepsilon) + 1 = \dim_{g(s)}^* \Omega$$

然るに ε が s に無関係なることはこの操作を繰り返して $0 \leq s \leq a$ に対し $\dim_{g(s)}^* \Omega = \text{const.}$ なることを意味する。然るに g は Ω の任意の点なる故定理は証明された。

(8) " M が n -dimensioned の compact set で I が R^1 の interval なる cylinder $M \otimes I$ は $\dim(M \otimes I) = \dim M + 1$ " なることは Alexandroff: Dimensions theorie. Math. Ann. 106 を見よ。この事実を用ひれば (8) は容易に云へる。実は $\dim_p [M \times p] = \dim M + 1$ なることを云へれば $\dim_p^* \Omega = \dim_p \Omega$ となり Menger の dimension の homogeneity が云へるのであるのはつきりした証明をしらぬかりあたまはしにする。

4. $\dim_p \Omega \equiv 2$ の場合

$\dim_p \Omega = 1$ の点はないから

$2 \leq \dim_p \Omega \leq \dim_p^* \Omega \leq 2$ が各点 p で成立つ。

更に Pasch の定理が成立つ。

(4.1) (定理) $\bar{S}(p)$ の三頂 (p_1, p_2, p_3) が 三角形をなすときは λ を $\overline{p_1 p_2}$ の内点とするとき、 g が $\overline{p_1 p_3} + \overline{p_2 p_3}$ を射影は \overline{xy} の定むる geodesic line は λ を通る geodesic line 全体を動き、且つ $y = p_1, p_2$ の場合を除き一度づゝである。

(証明) H. Busseman⁽⁹⁾ が $S.1. space$ を証明したものと殆んど同様である。

この定理によれば

(4.2) (定理) Ω の各点は数平面の単位円に *homeomorphic* な近傍をもつ。従つて空間の *separability* (*finitely compact*) より Ω は三角形分割可能である。⁽¹¹⁾

(証明) 充分小な δ に対し $S(p, \delta)$ 上の *diametral* でない二点 q, γ をとりその *diametral* な点を q', γ' とすれば。又が四辺形 $q\gamma q'\gamma'$ を動かすとき $\overline{p\alpha}$ はあつまつて単位円に *homeomorph* な近傍をつくる。(4.1)によればこの証明は明らかである。(以下 次巻)

(9) $\overline{p_1 p_2}, \overline{p_2 p_3}, \overline{p_3 p_1}$ が内点を共有しないこと。

(10) *Math. Ann.* 10

(11) T. Radó の定理 (*Acta Szeged*, vol 2)

(1947. 1. 20 受付)