29. Analytic operations ト Analytic operrational equations]

清永辰次郎（阪大）

§1. 空間EトE$_1$トヲ複素Banach空間トスル。$U_1(x)$, $U_2(x)$, …… $U_n(x)$…… ヲ夫々連続ナ一次 二次…n次，…斉次オペレーションヨントシ、$F(x)$ ヲ連続ナ解析的オペレーションヨントスル。
$F(x)$ハ一点x_0（ソレハ0ト考ヘテモイヽ）ヲ含ム領域ヲナス集合ニテ定義セラレテヰルトスル。

$y = x + F(x)$ナル形ノ解析的オペレーション方程式ヲ考ヘルタメ$F(x)$ヲ0ノ近傍デ展開スルトキ $F(x) = U'(x) + U_2(x) + \cdots\cdots$ ニテ $F(0) = 0$，　$U'(x) = \alpha x + U_1(x)$，$\alpha$ ハ適当ナ複素数$\neq 0$，ト書キナホストキ$U_1(x)$ガ完全連続トナル如キモノト假定スル。αニテ両辺ヲ除シ書キナホセバ

$$y = x + U_1(x) + U_2(x) + \cdots + U_n(x) + \cdots\cdots$$

ノ $y = 0$ ニテ $x = 0$ ナル解ヲ考ヘル。コレハ $y = 0$ ノ近傍ニ於ケル逆オペレーションノ存在ヲ意味シテヰル。

コレハ逐次近似法ヤ優級数法ヤ Kerner, Hildebrandt ノ陰函数存在定理ヤ Leray Schauder ノ不動点定理等デモ論ゼラレルガ Schmidt ノ非線型積分方程式論ノ逐似近似法ニヨル

---

§.2. 先ヅ $U_1(x) \equiv 0$ 即 $y = x + U_2(x) + U_3(x) + \cdots\cdots$ ($= x + F(x)$ ト書ク) ナル場合ヲ考ヘル。

$$U_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{n}{2\pi i}\int_{|\alpha|=r} \frac{F\left(\alpha \frac{x}{\|x\|}\right)}{\alpha^{n+1}} d\alpha$$ ト $F(x)$ ノ連続性トカラ $\|U_n(x)\| \leqq M\|x\|^n$ 充分小ナル δ ニ対シ $\|x - x'\| < \delta$, $\|x\| < \delta$, $\|x'\| < \delta$ ノ充分小ナル処ニテ

$\|F(x)\| < M\|x\|^2$ ト $\|F(x) - F(x')\| \leqq \|x - x'\|^2 l$

逐似近似法ニヨリ $x = y - F(x)$ ニテ $x_1 = y$; $x_2 = y - F(x_1)$, $\cdots\cdots$ トヲケバ $\|y\| < \delta_1$, ; $\tau = \delta_1 + M\tau^2$ ノ小ナル正根ヲ τ_1 トスルト $\tau_1 < 2\delta_1$, $\|x\| < \delta_1$ ニトレバ $\|x_1\| \leqq \|y\| < \tau_1$

$\|x_2\| \leqq \|y\| + \|F(x_1)\| \leqq \tau_1$, $\cdots\cdots$

倚 $\|x_k - x_{k-1}\| = \|F(x_{k-1}) - F(x_{k-2})\| \leqq l\|x_{k-1} - x_{k-2}\|^2$ $\leqq q\|x_{k-1} - x_{k-2}\|$, $q < 1$

依ツテ $x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots\cdots + (x_k - x_{k-1})$ ハ絶対收斂シ極限ヲ x トスレバ $x = y - F(x)$ ヲ満足スル解ガ存在スル。

解ハ唯一ツデ $\|y\| \to 0$ ナラバ $\|x\| \to 0$, 何者他ニ解 x^* アリトスレバ $\|x^*\| < \delta_2$ ナラバ $l_* 2x_1 \leqq q < 1$, $l_* 2\|x^*\| \leqq q < 1$ ナル如ク $\|y\|$, $\|x^*\|$ ヲエラベルカラ $\|x^* - x_2\| \leqq q\|x^* - x_1\|$, $\|x^* - x_3\| \leqq q^2\|x^* - x_2\|$, $\cdots\cdots$ 依ツテ $x^* = \lim x_k = x$,

次ニ $x = \varepsilon y - F(x)$ ニ於テ x ハ ε 及 y ノ解析的オペレーションデアル。何者. $\|y\|$ ノ充分小ナル値ニ対シ $q_1 > 1$ ナル q_1 ニ対シ $|\varepsilon| \leqq q_1$ ニテ充分小ナル解 x ガアル。逐次近似法ヲ $x_1 = \varepsilon y$,

$x_2 = \varepsilon y - F(x_1)$ トシテ繰返ヘセバ x_k ハ $|\varepsilon| < \delta_3$ ニテ ε ノ正則函数ニテ x_k ノ一様収斂ノ極限・xモ亦 ε ノ正則函数ニテ

$$x = \left.\frac{dx}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}^{2} + \left.\frac{d^2 x}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \cdots\cdots = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots$$

$\varepsilon = 1$ トオキ $x = A_1 + A_2 + \cdots\cdots$, $A_1, A_2, \cdots\cdots$ ハ係数比較ニテ求ラレル。即チ $A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots = \varepsilon y - U_2(A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots)$ $- U_3(A_1\varepsilon + \cdots\cdots) - \cdots\cdots\; U_k(A_1\varepsilon + \cdots\cdots) - \cdots\cdots$ ヨリ $A_1 = y$ $A_2 = U_2(y), \cdots\cdots$ $\|y\| < \delta_4$ ニテ x ハ y ノ正則函数トナル。

右辺ノ $U_2(A_1\varepsilon + \cdots\cdots)$, $U_3(A_1\varepsilon + \cdots\cdots)$ 等ノ ε ニ関スル $\varepsilon = 0$ ニ於ケル微分係数ハ例ヘバ

$$\frac{U_2(A\varepsilon + \cdots\cdots) - 0}{\varepsilon} \longrightarrow U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A + \varepsilon^{\frac{3}{2}}A_2 + \cdots),$$

$$\frac{U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_1 + \cdots) - 0}{\varepsilon} \longrightarrow U_2(A_1 + \varepsilon A_2 + \cdots\cdots),$$

$$\frac{U_2(A_1 + \varepsilon A_2 + \cdots) - U_2(A_1)}{\varepsilon} \longrightarrow \frac{U(A_1, \varepsilon A_2 + \cdots) + U_2(\varepsilon A_2 + \cdots)}{\varepsilon}$$

$$\to U(A_1, A_2 + \varepsilon A_3 + \cdots) + U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_2 + \cdots\cdots),$$

$$\frac{U(A_1, A_2 + \varepsilon A_3 + \cdots) + U_2(\varepsilon^{\frac{1}{2}}A_2 + \cdots) - U(A_1, A_2)}{\varepsilon}$$

$$\longrightarrow U(A_1, A_3 + \varepsilon A_4 + \cdots) + U_2(A_2 + \varepsilon A_3 + \cdots\cdots) \cdots\cdots$$

$U_2(A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots\cdots) = W_2\varepsilon^2 + W_3\varepsilon^3 + \cdots\cdots$ ニテ表ハサレル、更ニ高次ノ多項式オペレーションデモ同様デアル。コヽニ

$U_2(X+Y) = U_2(X) + U(X, Y) + U_2(Y)$.

§3. $y = x + U_1(x) + U_2(x) + \cdots\cdots + U_k(x) + \cdots\cdots$ (1)

ナル場合

(I) $x + U_1(x) = 0$ ガ $x = 0$ ヨリ外ニ解ナキトキ、即チ 1 ガ固有値デナイトキ $x + U_1(x) = Z$ ハ $Z = 0$ ニテ $x = 0$ ナル唯一ツノ解ガアリ $x = Z - V_1(Z)$、ココニ $V_1(Z)$ ハ完全連続ナ線型オペレーション（*Riesz* ノ定理）

依ツテ $x=y-\sum_{i=2} U_2(x)-V_1(y-\sum_{i=2} U_i(x))$

V_1 ハ連続デ括弧内ハ$\|x\|$ノ充分小ナル処ニテ一様収斂ナル故

$V_1U_2, V_1U_3, \cdots$ ノ和トナルカラ §2. ノ場合ト全ク同様ニテ

(1) ニハ $\|y\|<\delta_5$ ナルトキ解ガ存在シ唯一ツニ限ル。

(II) $x+U_1(x)=0$ ガ $p\geqq 1$ 個ノ線型独立ナル固有解 $x_1\cdots x_p$ ヲモツ場合

共軛方程式 $X+\overline{U}(X)=0$ モp個ノ線型独立ナル固有解 $X_1,\cdots\cdots X_p$ ヲモツ。

$x+U_1(x)=z$ ガ解ヲモツタメノ必要且充分ナル條件ハ $X_i(y)=0 \quad (i=1,2,\cdots p)$ 成立スルコトニテソノトキ $x+U_1(x)=z$ ノ解ハ $x=z-V_1(z)+\alpha_1x_1+\cdots\cdots+\alpha_px_p$ (*Riesz-Schauder* ノ定理) コレハ非斉次方程式ニ二ツノ解ガアレバソノ差ハ斉次方程式ノ解デアルコトカラ出ル,

猶 $x+U_1(x)=y-\sum_{i=2} U_i(x)$ ガ解ヲモツタメノ必要且充分ナル條件ハ

$$X_i(y)-\sum_{j=2}^{\infty} X_i\overline{U}_j(x)=0 \qquad i=1,2,\cdots\cdots p.$$

ソノトキ

$$x=y-\sum_{i=2} U_i(x)-V_1(y-\sum_{i=2} U_i(x))+\sum_{j=1}^{p}\alpha_jx_j$$

コノ場合モ §2 ノ時ト同様ニシテ (i) ニハ $\|y\|<\delta_i$ ナルトキ解ガアルコトガワカル。 尚 $x=\varepsilon y-F(x)-V_1(\varepsilon y-F(x))+\varepsilon\sum\alpha_jx_j$ トオイテ逐次近似法ヲ適用スレバ xハεニ関シテ正則ニシテεノ巾級数トシテ表ハサレル。ソノ表示式ニ於テ $\varepsilon=1$ トオキ更ニ $y=\beta y_*$ トヲケバ $\|y_*\|$ ガ充分小ナラバ xハ $|\alpha_1|, |\alpha_2|,\cdots\cdots|\alpha_p|$, $|\beta|$ ガ充分小ナラバ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_p$, β ノ巾級数トナリ、係数ハ y_* ノ解析オペレーションデアル。 コノ解ヲ解ノ存在スルタメノ條件ニ代入スレバ

$$P_i(\alpha_1\cdots\alpha_p\beta)=0 \qquad i=1,2,\cdots p$$

トナリ $\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_p\ \beta$ ノ満足スベキ條件トナル。処ガ z ヲ含ム項ハ $U_2, U_3, \cdots$ デアルカラ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_p$ ノ一次ノ項ハ表ハレナイ

$$B_0^{(i)}\beta + B_{00}^{(i)}\beta^2 + B_{01}^{(i)}\beta\alpha_1 + \cdots\cdots + B_{0p}^{(i)}\beta\alpha_p + B_{11}^{(i)}\alpha_1^2 + \cdots\cdots$$
$$+ B_{pp}^{(i)}\alpha_p^2 + B_{12}^{(i)}\alpha_1\alpha_2 + \cdots\cdots + B_{p-1\,p}^{(i)}\alpha_{p-1}\alpha_p + \cdots\cdots = 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots p):$$

Bハ y_* ノ汎函数デアルカラBノ値ハ複素数デコレラノ関係式カラ $\beta, \alpha_1, \cdots \alpha_p$ ガ定メラレル。特ニ $p=1$ ノ場合ニハ Schmidt ノ得タ様ニシテ $B_0 \neq 0$　$B_{11} \neq 0$ ナラバ α ニハ二根アリ、ソレヲ解ニ代入スレバ解ガ二ツアルコトガワカル。$B_0 \neq 0$, $B_{11} = B_{111} = \cdots\cdots = 0$ ニテ α^q ガ最初ニ係数ガ零ナラヌモノトスレバ解ハ q 個出ル。又例ヘバ $B_0 \neq 0$, $B_{11} = B_{111} = \cdots\cdots = 0$ ナラバ β 共ニ零ニナル解ナク, $B_0 = \cdots\cdots$ 総テ $= 0$ ナラバ α ニ従属スル無限ニ多クノ解ガアル。　　　　　(ツヅク)

(1947. 2. 6 受付)