34. 有限群の部分群の作る束について

（東大）　鈴木通夫

群の部分群は含む含まれるの関係によつて束を作ることはよく知られて居ります。この束は群の構造と相当密接な関係がある様に思はれます。以下この束と群との間の二三の関係特に束が同型になる二つの群の関係について少し述べて見たいと思ひます。証明はあまり簡単でありませんでしたので、詳細は後にゆづらせて頂きます。

1. 群 $\mathfrak{G}$ の部分群の束を $L(\mathfrak{G})$ と書きます。

Lemma 1. $L(\mathfrak{G}) \cong L_1 \times L_2$ と束の直積になつて居れば $L_1 \cong L(\mathfrak{H}_1)$, $L_2 \cong L(\mathfrak{H}_2)$ なる部分群 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ があり.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$$

こゝで $\mathfrak{H}_1$ と $\mathfrak{H}_2$ の位数は互に素である。逆もよい。

（逆の方は岩澤先生によつて既に知られて居ります。このlemmaは本田さんの御注意によるものです。）$\mathfrak{G}$の中で L_1, L_2 に対応する部分群を $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ とし、その中から任意の元 H_1, H_2 を取れば $L\{H_1\}$ $L\{H_2\}$ と共に $L(\{H_1\} \cup \{H_2\})$ が分配束だから $H_1 H_2 = H_2 H_1$

定理 1. Lを任意の有限束とする。Lが直積因子として鎖を含まなければ $L(\mathfrak{G}) \cong L$ なる群 $\mathfrak{G}$ は高々有限個しかない。

Lが既約且鎖でない場合だけを考へれば充分です。$L(\mathfrak{G}) \cong L$ なる群 $\mathfrak{G}$ の位数が素数巾 p^n だとすれば $\mathfrak{G}$ は巡回群でありませんから $\mathfrak{G}/\Phi\mathfrak{G}$（$\Phi\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{G}$ の Φ部分群）を考へればpが定まり、Lの次元からnが定まりますから $\mathfrak{G}$ の位数がLによりきまります。$\mathfrak{G}$の位数が素数巾でないとすると素因子pのp-Sylow-群$\mathfrak{P}$を考へます。$\mathfrak{P}$が不変部分群でないならばその共軛群の数は$\equiv 1 \pmod{p}$で束が與へられて居る以上、pは有限個の可能性しかありません。$\mathfrak{P}$が不変ならばSchurの定理（Zassenhausの教科書IV定理25）によりまして$\mathfrak{G}$は$\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$に同型な部分群$\mathfrak{H}$を持ちます。Lが既約ですから$\mathfrak{H}$は不変部分群ではなく（lemma 1）$\mathfrak{H}$の共軛群の数は$p$-巾でこの場合も$p$は有限個しかありません。即ち$\mathfrak{G}$の位数の素因子は有限通りしかなく、各々の素因子の割る最高巾は明らかにLの次元により小さいのですから$\mathfrak{G}$は高々有限個。

定理1によりますと束を與へると群の構造は殆んど確定してしまふことが分かります。そこで束の同型な二つの群の位数に関することを調べてみます。

2. $\mathfrak{G}$の位数が素数qの三乗であつたとします。すると容易に、$\mathfrak{G}$が(q, q, q)型のAbel群でないならば $L(\mathfrak{G}') \cong L(\mathfrak{G})$ なる $\mathfrak{G}'$ の位数は又素数の三乗であることがわかります。特に$\mathfrak{G}$が巡回群でな

いならば $\mathfrak{G}'$ の位数は又 q^3 であります。このことから一般に

<u>定理2.</u> $\mathfrak{G}$ の位数を素数巾 q^n とする。$L(\mathfrak{G}) \cong L(\mathfrak{G}')$ なる L

$\mathfrak{G}'$ は $\mathfrak{G}$ が $(q, \dots\dots q)$ 型の Abel 群でないならば又素数巾 p^n である。$\mathfrak{G}$ が巡回群でなければ $p=q$. $\mathfrak{G}$ が $(q \dots\dots q)$ 型の Abel 群ならば、$\mathfrak{G}'$ は $(q \dots\dots q)$ 型の Abel 群であるか又は （p は素数）

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \quad \mathfrak{P} \text{ は } (q \cdots q) \text{ 型の Abel 群 } \mathfrak{Q} = \{Q\} \quad Q^p = 1$$

$$P \in \mathfrak{P} \text{ に対して } Q^{-1}PQ = P^\mu \quad \mu \not\equiv 1 \quad \mu^p \equiv 1 \pmod{q}$$

即ち $\mathfrak{G}'$ は岩澤先生の P-群である。

ことが Induction により証明されます。この定理によれば P-群は或る意味で束論的に特徴附けられるのですが、束 L の元 A に対して A の下に素な元全体の交を群論に於ける様に Φ_A とでも表はすことにすると L のすべての元について A/Φ_A なる区間が既約可補モヂュル束となる束 L に対応する群は P-群及び

$$\mathfrak{G} = \{P, Q\} \quad P^{p^n} = Q^q = 1 \quad Q^{-1}PQ = P^\mu \quad \mu \not\equiv 1 \quad \mu^q \equiv 1$$

なる群を除いて素数巾位の群になります。全体について仮定しなくても L の最大元 I についてだけ仮定しても或る程度素数巾位の群を特徴づけます。

3. 二つの群 $\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{G}'$ が $L(\mathfrak{G}) \cong L(\mathfrak{G}')$ なる時 $\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{G}'$ とは束同型と言ふことにします。定理2によりますと $\mathfrak{G}$ の p-Sylow 群 $\mathfrak{S}$ に対応する $\mathfrak{G}'$ の部分群は一般に p-Sylow 群になります。例外は $\mathfrak{S}$ が $(p \cdots p)$ 型の Abel 群及び巡回群の場合であります。この場合は Sylow 群が割合簡単な構造を持つて居りますからもつとくはしく調べることが出来ます。

<u>Lemma 2</u> $\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{G}'$ とは束同型。$\mathfrak{G}$ の p-Sylow 群 $\mathfrak{S}$ が $\mathfrak{G}$ の不変部分群とする。$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{G}'$ との束同型対応で $\mathfrak{S}$ に対応する $\mathfrak{G}'$ の部分群が素数巾位の群でなかつたとする。その時

i) $\mathfrak{G}$ の中に $\mathfrak{S}$ を含む群 $\mathfrak{N}$ $(\neq \mathfrak{S})$ で $L(\mathfrak{N})$ が既約可補モヂュル束なるものがなければ $L(\mathfrak{G})$ が $L(\mathfrak{S})$ と他の束との直積になる。即ち $\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{G}$ の

直積因子になる。

ii) $\mathfrak{G}$の中に$\mathfrak{S}$を含む$L(\mathfrak{N})$が既約可補モヅル束になる$\mathfrak{N}^{(\neq\mathfrak{S})}$があれば$L(\mathfrak{G})$は$L(\mathfrak{N})$と他の束との直積に分解する。即ち$\mathfrak{N}$が$\mathfrak{G}$の直積因子になる。

この証明は$\mathfrak{S}$が極大分群で$L(\mathfrak{G})$の自己同型により動くものは$\mathfrak{P}$-群以外にない（$L(\mathfrak{G})$ノ次元≥ 3）ことを用ひて$\mathfrak{S}$が極大なる場合を証明し、$L(\mathfrak{G}/\mathfrak{S})$の次元に関する *induction* によるわけです。証明には前に挙げた *Schur* の定理と、p-*Sylow*群$\mathfrak{P}$がその *Normalisator* の核心に入る時 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\cong\mathfrak{P}$なる不変部分群$\mathfrak{N}'$があるといふ *Burnside* の定理が用ひられることを附記しておきます。

この *lemma* を用ひれば、

<u>定理 3</u>　$\mathfrak{G}$と$\mathfrak{G}'$とが束同型とする。$\mathfrak{G}$の*Sylow*群$\mathfrak{S}$に対応する$\mathfrak{G}'$の群が素数巾位でないならば$\mathfrak{G}$と$\mathfrak{G}'$との同型対應で互に対応する$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$があり$\mathfrak{N}$は$\mathfrak{G}$の$\mathfrak{N}'$は$\mathfrak{G}'$の不変部分群で$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\neq E$且$L(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\cong L(\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}')$が既約可補モヅル束になりその次元は$\mathfrak{S}$の次元に等しいか又は$\mathfrak{S}$の次元より一つ高い。

これを繰返して用ひれば、

<u>定理 4</u>　二つの群が束同型ならば位数の素因子の数は等しい。

尚くはしく

<u>定理 5</u>　$\mathfrak{G}$と$\mathfrak{G}'$とが束同型ならば、$\mathfrak{G}$と$\mathfrak{G}'$との束同型で対応する$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$がありそれ等は$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$の不変部分群で、その位数は等しく$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}'$は$n$巡回群と$P$-群との直積で、その位数は$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$の位数と互に素になる。

少し$\mathfrak{N}$の取り方を変へれば、

<u>定理 6</u>　$\mathfrak{G}$と$\mathfrak{G}'$とが束同型ならば$\mathfrak{G}$と$\mathfrak{G}'$との束同型對應で互に対應する$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$がありそれぞれ$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$の不変部分群その位数は等しく$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}'$は素因子分解の型の等しい位数の巡回群である。この時$\mathfrak{N}$と$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$の位数は必ずしも互に素ではないが、この拡大は今

解する。

こゝで特に $\mathfrak{G}$ が auflösbar である場合を考へますと P. Hall の定理によつて

定理 7　$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{G}'$ が束同型且 $\mathfrak{G}$ が auflösbar とすると $\mathfrak{G}'$ も auflösbar になる。

ことが証明されます。

4　以上の結果は L($\mathfrak{G}$) の自己同型について考へるともう少しはつきりした結果を與へます。それには定理3を次の様に拡張します。

定理 8　$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{G}'$ との束同型対應で $\mathfrak{G}$ の Sylow 群 $\mathfrak{S}$ が素数巾位でない群に對應したとする。$\mathfrak{S}$ を含む L($\mathfrak{N}$) が既約可補モヅル束になる群 $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{S}$ があれば $\mathfrak{N}$ が又不変部分群になる。

これを用ひれば L($\mathfrak{G}$) の自己同型対応に関して

定理 9　L($\mathfrak{G}$) の自己同型対應による Sylow 群が素数巾位ではない部分群に対応したとすると L($\mathfrak{G}$) は既約可補モヅル束であるか又は既約可補モヅル束を直積因子として持つ。

ことが証明されます。從つて $\mathfrak{G}$ が P-群を直積因子に持たなければ L($\mathfrak{G}$) の自己同型によつて Sylow 群は又 Sylow 群に對應するわけですが必ずしも同一の素数に対應するとは限りません。その時は $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ が $p^{\alpha}q^{\alpha}$ 次の巡回群になる不変部分群 $\mathfrak{N}$ が存在するわけです。

單純群の場合には L($\mathfrak{G}$) の自己同型によつて p-Sylow 群は又 p-Sylow 群に對應します。この場合には $\mathfrak{G}$ の自己同型群が L($\mathfrak{G}$) の自己同型群の部分群と考へられるのですが、この二つの關係はよく分つて居りません。

— 以上 —

(1947. 3. 10 受付)