41. 等距離集合に就て (I)

津田　文夫

Euclid 平面上に有界閉集合 E があるとき Front$(\Sigma\, U(x, r))$ なる集合を E の『距離 r の等距離集合』と呼び記号 E(r) で表す。以下に於て E(r) の位相的，計量的な性質を考へる。先づ云へることは E(r) の長さが有限なることが判る。此を利用して考へてゆきます。

此の基本的な性質は全く近藤先生に依るものです。

先づ $D(E)=\overline{\lim}\, dis(x,y \quad x,y\in E)$ と定義します。

Lemma 1. $r/D(E)$ が非常に大きな値なるときは，$E(r)$は円と近似せるjordan閉曲線である．

此を証明します。$E\ni x$ をとります。そしてxより任意の方向に半直線を引きます。その上にyをとります。但し $dis(x,y)>r+D(E)$ なる様にとる。するとyは $\sum_{x\in E}U(x,r)$ の外点なることは明か。又xはその内点である。依てその半直線のx,yの間に境界点zがある。もし境界点が一つ以上あるとせば むじゆんである。何故なれば それをa,bとする。但しx, a, bの順にあるものとする。さて$E\ni a'$, b'があり $dis(a,a')=dis(b,b')=r$ なる点がある筈。然るに$\Delta x b b'$ を見るにaが辺xbの上にあるから $dis(b',a)<max(dis(b,b'), dis(x,b'))\leqq max(D(E), r)=r$。そこで $a\in U(b',r)\subseteqq\sum_{x\in E}(U(x,r))$ 此はaが境界点なることにむじゆんする。

次に境界点が連続なることは x点に原点をもつ極座標を作る。$E(r)$の方程式を$\rho(\theta)$であらわすとき$\rho(\theta)$の連続なることは適当な $\varepsilon>0$ をとると如何なるδをとつても $|\theta_0-\theta'|<\delta$ なるθ'が存在して $|\rho(\theta_0)-\rho(\theta')|>\varepsilon$ なるものがある。そこでその様な $\varepsilon>0$ に対して $\{\delta_i\}$ $(i=1.2.3\cdots\cdots)$ をとりそれに対応して$\{\theta_i\}$をとる。$|\rho(\theta_0)-\rho(\theta_i)|>\varepsilon$ かつ $|\theta_0-\theta_i|<\delta_i$ とする。すると $|\rho(\theta_i)|<r+d(E)$ そこで Bolzano-Weierstrassの定理によつて $\{\theta_i\}$ に適当な部分列があり θ_{k_i} $(i=1,2,3,\cdots\cdots\cdots)$ をとり $\lim_{i\to\infty}\theta_{k_i}=\theta_0$ また $\lim_{i\to\infty}\rho(\theta_{k_i})=\rho_0\neq\rho(\theta_0)$ なるものがある。さて境界点の集積点は又 境界点である。そこでx点より出るθ_0線の上に少くも二つの境界点があることになる。此は むじゆんである。そこで$E(r)$は連続である。

$E(r)$が長さを持つことを証明するために$E(r)$はそのすべての点

に於て半切線を持つことを示したい

Lemma 2。 $r/D(E)$ が非常に大きな値なるとき $E(r)\ni A,B$ $dis(A,B)\ll r$ なるときA, B を通る半径 r の円 O_1 の中にEの点 O_3 があるとき，$E(r)$ のA, B を結ぶ部分は円 O_1 と一致するか又はその内部に含る。

証明，$E(r)$ で囲る領域を $(E(r))$ であらわす。さて，もし上の命題が成立してゐないならば 円 O_1 と $(E(r))$ とは共通点を有す。その点をMとしておく。すると $E\ni O_2$ かつ円 O_2（半径は r とす）の内部に点Mを含む様な O_1 が存在する。

$dis(A,B)<\ \ \cdot r$ とすれば $dis(O_2 O_3)>\frac{r}{2}$ である。

そこで $D(E)<\frac{r}{2}$ と假定しうる故むじゅんとなる。

Lemma 3。 $D(E)\ll r$ なるとき，かつ $E(r)\ni A, B$ なるとき $dis(A,B)\ll r$ ならばA, B を通る円の中一つはその内部にEの点を含む。

今Aに対応するEの点を A' とすれば，又円の中心をOとしおくと $\angle OAA'<60^\circ$ であれば $AO=OA'$ となるから，A' は円Oの内部にある。そこで今 $\angle OAA'\geqq 60^\circ$ と假定する．但し $\angle OAA'<90^\circ$ となる様なOをとることにする。さて $dis(A,B)\ll r$ なる故 $\angle OAB>80^\circ$ としても良い 即 $\angle A'AB>140^\circ>\frac{3\pi}{4}$ 然るに又一方 $dis(A,B)\ll r$ なるときは $\angle A'AB<\frac{3}{4}\pi$ が云へる。何となれば $B'\in E$ をBに対応する点としたとき $\angle A'BB'<\arcsin.$ $D(E)/r<1^\circ$ として差支へない。即 $\angle B'BA<180^\circ+1^\circ-140^\circ=61^\circ$ すると $AB\ll r$ なる故Aは円 B' の内部にあり即 $A\in U(B',r)$ 此はAが $E(r)$ の点なることに むじゅんす。

Lemma 4. $D(E)\ll r$ なるとき $E(r)$ のすべての点に於て半切線を有す。

証明 以下のとき今迄の Lemma の條件はすべて満されてゐる。先ず Lemma 1. により極座標を適當にとれば $E(r)$ の各点に parameter θ を対応せしめうる。

そこで $E(r)$ を $x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ として差支へない。此処に $f(\theta)$, $g(\theta)$ は θ につき一価連続なり。そのとき θ_0 点で右半切線をもたぬとすれば

$$\underline{\lim}_{S\to S_0+0}\frac{g(S)-g(S_0)}{f(S)-f(S_0)}=a \qquad \overline{\lim}_{S\to S_0+0}\frac{g(S)-g(S_0)}{f(S)-f(S_0)}=b$$

は常に存在する。S_0 を通って方向係数 a, b を持つ半直線を $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ とする。S_0 の如何なる近傍 $U(S_0,\delta_i)$ をとつても，任意に $\varepsilon>0$ を与へたとき $U(S_0,\delta_i)$ を S_i, $\overline{S_i}$ が存在して

$$\left|\frac{g(S_i)-g(S_0)}{f(S_i)-f(S_0)}-a\right|<\varepsilon, \quad \left|\frac{g(\overline{S_i})-g(S_0)}{f(\overline{S_i})-f(S_0)}-b\right|<\varepsilon$$

が成立する。すると Lemma 2, によって $\overline{S_i}\in\widehat{S_i S_{i+1}}$ 此処に $\widehat{S_i S_{i+1}}$ とは S_i, S_{i+1} を通る半径 r の円でその内部に E の点を含むものである。すると $\overline{S_0S_i}\wedge\overline{S_0\overline{S_i}}\leq\varphi$

此処に φ は半径 r の円で長さ $dis(S_i\ S_{i+1})$ をもつ弦の上の円周角である。すると $dis(S_i\ S_{i+1})$ を充分小にすれば $2\varphi<\mathfrak{a}\hat{\ }\mathfrak{b}=\theta$ となしうる。そこである $\varepsilon>0$ に対して d を定めると

$U(S_0,d)\ni S, \overline{S}d$ をとれば $|\theta-\varphi|<\varepsilon'$ となる。

又上により $\varphi<\frac{\theta}{2}$ が成立する。そこで

$$\theta<\varphi+\varepsilon<\frac{\theta}{2}+\varepsilon$$ ε は任意なる故次が成立つ $\theta<\frac{\theta}{2}$。此は むじゅん。即 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は一致せねばならぬ。

定理 1　　E が有界閉集合なるとき $E(r)$ はすべての点に於て半切線を有する曲線なり。従って $E(r)$ はつねに有限の長さをもつ。

証明　　与へられた r に対して $D/r\ll 1$ が Lemma の条件を満す様に D を定める。そして E の各点 x に対し $U(x,\frac{D}{2})$ なる近傍を与へると E が有界閉なる故に Borel-Lubesgue の被覆定理によって E は有限個の $\{U(x_i,\frac{D}{2})\}(i=1,2,\cdots n)$ によって覆はれる。そこで各々の $U(x_i,\frac{D}{2})$ を Lemma の E と考へてやると良い。

此処で両側の半切線が一直線をなす点を$E(\lambda)$の正則点，然らざる点を角点という。すると次は容易にわかる。

$E(\lambda)$の角点は高々可附番個なり

何となれば$(E(\lambda))(\lambda)$を考へると長さが有限である　然も$E(\lambda)$の角点に対して互に*disjoint*な弧が対応するから。

(1947.3.16)