44. 二次元開集合体ノ上ノ測地線ノ延長

矢島　　猛（阪大）

1.　K.Menger ニヨレバ compact ナ距離空間ガ convex（即チ任意ノ二点 a, b ニ対シ少クモ一点 c ガ存在シテ $ac + cb = ab$ トナル. 此ノトキ c ヲ a, b ノ間ノ点ト云ヒ $c \in \overline{ab}$ デ表ハス）ナルトキハ任意ノ二点 a, b ヲ結ブ測地線分（以下 g.S ト略記スル）$\overline{ab}$ ガ存在シテ其ノ長サハ丁度 ab ニ等シイ。従テ開集合体上ノ二点 a, b ヲ結ブ g.s. $\overline{ab}$ ヲ延長シテ行クトキハ（c ガ $\overline{ab}$ ノ延長ノ点トハ $ab + bc = ac$ ナルコト）遂ニ e ナル点ガ存在シテ $\overline{ae}$ ハ延長出来ナイ, 即チ任意ノ x ニ対シ $ae + ex > ax$ トナル. 此ノ点 e ヲ a 又ハ $\overline{ab}$ ノ最遠点ト名付ケ, スベテノ b ニ対シ $\overline{ab}$ ノ最遠点ノ集合ヲ $E(a)$ デ表ハス。

complete analytic Riemanian surface ノ上デノ $E(a)$ ノ状態ニ関シテハ既ニ S.B. Myers ガ Duke Math. Jour. vol I, II ニ種々ノ結果ヲ報告シテ居ル。以下此ノ問題ヲ距離幾何学的ニ取扱ッテミヤウ　先ヅ仮定トシテ,

P 1.　Ω　二次元開集合体デ convex ナ距離空間

P. 2.　実数 $\delta > 0$ ガ存在シテ $ab < \delta$ ナラバ $\overline{ab}$ ハ唯一ツ存在スル

P. 3.　任意ノ g.s ハ若シ延長出来レバ其ノ延長ハ一意ニキマル
即チ p, q ガ $\overline{ab}$ ノ延長ノ点ナラバ $p \in \overline{bq}$ 又ハ $q \in \overline{bp}$

ヲトル. P.2, P.3, ハ誌上談話会第3号工藤氏ノ geodesic space ノ條件 C ト殆ンド同ジデアル. 以下ナルベク工藤氏ト同ジ記号ヲ使ウコトニスル. 證明スベキコトハ

定理　$P_1 - P_3$ ヲ満足スル Ω デハ $E(a)$ ハ一次元連結集合デアル

デアルガ　證明ハ長クナルカラ出来ルダケ簡單ニ述ベル,

2. g.s ノ基本的性質

(2·A)　a, b ヲ結ブ g.S ガ二ツアレバ $b \in E(a)$ デアル. 此ノ図形ヲ slit ト名付ケル.

(證) 二ツノ g.S ヲ $\overline{ab^1}$, $\overline{ab^2}$ トシ各々ハ a, b 以外ニ共通点ヲ持タナイトスル. $b \neq E(a)$ トスレバ $\overline{ab'}$ ノ延長ノ点 c ガ存在スル. c ハ $\overline{ab^2}$ ノ延長ノ点デモアル. $p \in \overline{ab'}$, $q \in \overline{ab^2}$ トスレバ p, q ハ $\overline{cb}$ ノ延長ノ点デ且 $p \neq \overline{qb}$, $q \neq \overline{pb}$. 故ニ p, q. ニ矛盾　若シ $\overline{ab'}$, $\overline{ab^2}$ ガ共通点ヲ持テバ二ツノ g.S ハ一致スル. 仮定ニ反ス.

(2.B)　$a_n \to a$, $b_n \to b$ ナラバ $\lim_{n\to\infty}\overline{a_nb_n}$ ハ又 g.S デ $\overline{ab}$ ノ一ツデアル. 特ニ $b \neq E(a)$ ナラバ $\lim_{n\to\infty}\overline{a_nb_n} = \overline{ab}$ デアル　(證略).

(2.C)　$\overline{a_nb_n} \to \overline{ab}$ ナラバ $\overline{a_nb_n}$ ハ最遠点 e_n ハ $\overline{ab}$ ノ最遠点 e 又ハ $\overline{ae}$ ノ間ノ点ニ收斂スル　(證略)

3. 近傍

近傍系トシテハスベテ円近傍ヲトル. P ノ ε-近傍ヲ $S(P, \varepsilon)$ デ表ハス　Ω ハ compact ダカラ Euclid 平面ト位相合同ナ有限個ノ近傍デ覆ヘル. 従テ $\delta' > 0$ ナル実数ガアッテ $S(P, \delta'/2)$ ハ此ノ近傍系ノドレカニ含マレル　即チ任意ノ P ニ対シ $S(P, \delta'/2)$ ハ Euclid 平面ト位相合同ニナル. 便宜上 $\delta' > \delta$ ト仮定シテオク.

次ニ g.S. $\overline{ab}$ ノ右側トカ左側トカノ概念ヲ厳密ニ定義スル必要ガアルガ長クナルカラ省略スル　ε ヲ充分小ニスレバ $S(c, \varepsilon)$ $c \in \overline{ab}$ ハ $\overline{ab}$ ニヨリ二ツノ部分ニ分ケラレル. 従テ $\overline{ab}$ ノ近傍ニ於テハ右側, 左側ト言ッテモ不自然デナイ. a カラ b ノ方向ニ向ッテ右側, 左側ヲ夫々 $\overline{ab}$ ノ右側, 左側ト言フコトニスル

4. 三角形ノ内部

三点 a, b, c 及ビ g.S. $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ ノナス図形ヲ三角形トイフ. 辺　頂点等ノ意味ハ明ラカ.　今 $\triangle abc$ ガ Ω ヲ二ツノ部分ニ分ケ辺上ノ二点ヲ結ブ g.S ガ常ニ一方ノ部分ニ含マレルトキ $\triangle abc$ ヲ正則, g.S ヲ含ム部分ヲ $\triangle abc$ ノ内部トイフ.

(4A)　$\triangle abc \subset S(P, \frac{\delta}{2})$ ナラバ $\triangle abc$ ハ正則デアル

(證) $S(P, \frac{\delta}{2})$ ハ Euclid 平面ト位相合同デアルカラ $\triangle abc$ ハ Ω ヲ二ツノ部分ニ分ケル. $S(P, \frac{\delta}{2})$ ニ含マレル部分ヲ (辺ヲ

含マナイ)A, 他方ヲBトスル. $x\in A$ ニ対シ $\overline{ax}\subset A$ ナラバ x ヲ A_1 ノ点, $\overline{ax}\cdot B\neq 0$ ナラバ x ヲ A_2 ノ点トスル. $A=A_1+A_2$. Aハ連結ダカラ $H(A_1, A_2)=A_1\bar{A_2}+\bar{A_1}A_2\neq 0$. $A_1\bar{A_2}\neq 0$ トスル. $x\in A_1$, $x_n\in A_n$ ガアッテ $x_n\rightarrow x$. $\lim_{n\to\infty}\overline{ax_n}$ ハ a, x ヲ結ブ g.S デ $\overline{ax}$ ト異ナル. $\overline{ax}$ ハ slit ニナリ $ax<\delta$ ナルコトニ矛盾スル. 故ニ $A_1=0$ 又ハ $A_2=0$. $\bar{A_1}A_2\neq 0$ ナルトキモ同ジ. $A_1=0$ トスル. $\overline{ax}$ $(x\in A)$ ハ必ズ $\overline{bc}$ ニ交ハルカラ $ax\geqq\frac{\delta}{2}$ トナリ矛盾. 故ニ $A_2=0$. 従テ $\overline{ax}\subset A$. 極限ヲ考ヘルト $x\in\overline{bc}$ ノトキモ同ジコトガ言ヘル. $\overline{bx}\subset A$, $\overline{cx}\subset A$ ナルコトモ同様ニ言ヘル. 次ニ Δabc ノ辺上ノ二点 d, e ヲトル. $d\in\overline{bc}$, $e\in\overline{ab}$ トスル. Δabd ニツイテ Δabc ト同ジコトヲ考ヘAニ相当スル部分ヲ A' トスレバ $\overline{de}\subset A'\subset A$. (證終)

次ニ Δabc ニ於テ $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ 上ニ p, q ヲトリ $\frac{ap}{ab}=\frac{aq}{ac}$ トスルトキ $\overline{pq}$ ヲ Δabc ノ a ニ対スル緯線", 其ノ長サノ上限ヲ "a ニ対スル幅" ト名付ケル. 又 $x\in\overline{bc}$ ト a ヲ結ブ g.S ヲ "a ニ対スル経線" ト名付ケル. 若シ Δabc ガ Ω ヲ二ツノ部分ニ分ケ a ニ対スル緯線ガ其ノ一方ノミニ含マレルトキ其ノ部分ヲ "a ニ対スル内部" トイヒ, a ニ対スル経線ガ a ニ対スル内部ノミニ含マレルトキ Δabc ヲ基本三角形ト名付ケル. 以後間違ヒヲ起サナイトキハ "a ニ対スル" ヲ省ク.

(4.B) Δabc ニ於テ a ニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナラ a ニ対スル内部ガアル.

(證) $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ ヲ緯線 $\overline{p_iq_i}$ ニヨリ細分シ $p_ip_{i+1}<\frac{\delta}{4}$, $q_iq_{i+1}<\frac{\delta}{4}$ トスル $\Delta p_ip_{i+1}q_i$, $\Delta q_ip_{i+1}q_{i+1}$ ハ夫々 $S(p_i, \frac{\delta}{2})$, $S(q_i, \frac{\delta}{2})$ ニ含マレルカラ正則ニナリ従テ内部ガアル. 各三角形ノ作リ方カラ Δabc ハ Ω ヲ二ツノ部分ニ分ケル. 緯線ガ其ノ一方ニ含マレ且ソレガ $\Delta p_ip_{i+1}q_i$ 等ノ内部ト一致スルコトハ, 四辺形 $p_ip_{i+1}q_{i+1}q_i$ ガ $\overline{p_{i+1}q_i}$ ノ中点ヲ中心トスル半径 $\frac{\delta}{2}$ ノ円内ニ含マレルコトカラ, $\overline{p_ip_{i+1}}$ 上ノ点ヲ(4.A)ノ a 点, 四辺形ノ

内部ヲAト考ヘルコトニヨリ (4.A) ト全ク同様ニシテ得ラレル.

(4.C) Δabc ニ於テ a ニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナラ (i) 内部ノ各点ヲ通リ少クモ一ツノ縦線ガアル. (ii) 二ツノ縦線ハ共通点ヲ持タナイ.

(證) 内部ノ点 e ヲ通ル縦線ガ存在シナイトスル. 縦線 $\overline{pq}$ ヲ引キ e ガ Δapq ノ内部ニアレバ P ヲAノ点, 外部ニアレバBノ点トスル. H(A,B) ノ論法ヲ使ヘバ e ヲ中ニ含ム *slit* ガ出テクル。幅ガ $\delta/4$ ヨリ小サイコトニ矛盾. (ii) ハ二ツノ g.S ガ共通点ヲ持テバ交ハルコトガラ容易ニ出ル

5. ノヨイヲ最初ノ定理ノ証明ヲスル. ソノ前ニ予備定理ヲ二ツ掲ゲル。

予備定理 1. Δabc ハ a ニ対スル幅ガ $\delta/4$ ヨリ小ナル基本三角形トスル. 内部ニ $e\in E(a)$ ガアレバ $\overline{bc}$ 上ニモ $f\in E(a)$ ガアッテ e, f ハ $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレル

(証) e ヲ通ル縦線ヲ p_0q_0 トシ, $x\in bc$ ト a ヲ結ブ g.S. $\overline{ax}$ ヲ引ケバ必ズ $\overline{p_0e}$ 又ハ $\overline{eq_0}$ ノ間ノ点ヲ通ル. $\overline{p_0e}$ ヲ通レバ x ヲAノ点, $\overline{eq_0}$ ヲ通レバBノ点トシテ H(A,B) ノ論法ヲ用フレバ $f\in\overline{bc}$ ガアッテ $\overline{af}$ ハ二ツアリ *slit* ニナル. 故ニ $f\in E(a)$. コノコトハ任意ノ縦線ニツイテ言ヘル. 即チ任意ノ縦線 $\overline{pq}$ 上ニ $r\in E(a)$ ガアリ, $\overline{ar}$ ハ二ツアッテ一方ハ $\overline{p_0e}$, 他方ハ $\overline{eq_0}$ ニ交ハル 夫々 $\overline{ar}^1$, $\overline{ar}^2$ トスル. r ガ連続ナルコトハ $\overline{p_iq_i}\to\overline{pq}$ ナルトキ $r_i\to r$ トスレバ $r\in E(a)$ デ $\overline{ar}$ ガ二ツアルコトヲ言ヘバヨイ. ソレハ $\overline{ar_i}^1\to\overline{ar}^1$, $\overline{ar_i}^2\to\overline{ar}^2$ トスレバ $\overline{ar}^1, \overline{ar}^2$ ハ共ニ a, r ヲ結ブ g.S デ相異ナル. 故ニ $r\in E(a)$

予備定理 2. $b\in E(a)$ トシ c_i ハ $\overline{ab}$ ノ間ノ点 c ニ収斂スル $E(a)$ ノ点列トスル, シカラバ c_i ト $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレル点列 b_i ガアッテ $b_i\to b$ トナル

(証) c_i ハスベテ $\overline{ab}$ ノ左側ニアルモノトシテモ一般性ヲ失ハナイ

(1) $\overline{ab}$ ノ左側カラ $d_i\to c$ トナル点列 d_i ヲ適当ニトレバ $\overline{ad_i}$

ノ最遠点 e_i ハ b ニ収斂スル。何者。d_i 如何ニトッテモ b ニ収斂シナイトスル．e_i ハ (2.C) ニヨリ $\overline{ab}$ ノ間ノ点ニ収斂スル．ソノヤウナ点ノ上限ヲ $\bar{e}$ トスル。$\bar{e}$ ト b ノ間ノ点 f ニ左側カラ収斂スル点列 f_i ヲトレバ $\overline{af_i} \to af$ トナル (2.B)．故ニ $\overline{af_i}$ ノ間ノ点デ左側カラ C ニ収斂スル点列ガアル 矛盾．次ニ $\overline{ad_i} \to \overline{ac}$，$\overline{d_ie_i} \to \overline{cb}$．故ニ $\overline{ae_i} \to \overline{ab}$．シ充分大ニスレバ Δabe_i ノ a ニ対スル隅ハ任意ニ小ニナルカラ内部ガアル．又 $c_i \to c$ ダカラ Δabe_i ノ内部ニ c_j ガアル．改メテ c_i ト書ク．

(2) Δabe_i ニ於テ經線 pq ヲ充分 a ニ近クトレバ Δapq ハ正則，従テ基本三角形デアル．今 Δapq ガ基本三角形ニナルヤウナ $\overline{pq}$ ノ上限ヲ $\overline{p_iq_i}$ トスル．$b_i \in E(a)$ ガ $\overline{p_iq_i}$ ノ上ニアッテ b_i ト c_i トハ $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレル．

(3) $\overline{p_iq_i} \neq \overline{be_i}$ ナラバ $\overline{p_iq_i}$ ヲ内部ニスルヤウナ $\Delta ap^i_nq^i_n$ $\left(\lim_{n\to\infty} \overline{p^i_nq^i_n} = \overline{p_iq_i}\right)$ ヲ作レバ基本三角形デナイカラ $\Delta ap^i_nq^i_n$ 外部ニアル経線 $\overline{ax^i_n}$ ガアル，従テ $\lim_{n\to\infty} \overline{ax^i_n} = \overline{ax_i}$ ハ Δap_iq_i ノ外部ニアル．Δap_iq_i ノ内部ニアル $\overline{ax_i}$ ニ存在スル．故ニ $x_i \in E(a)$ シカシ x_i ト b_i ハ $E(a)$ ノ部分集合デ結バレルカドウカハ不明デアル．

(4) $i \to \infty$ ナルトキ $\overline{p_iq_i} \to b$ デアル，何者 然ラズトスレバ x_i ノ極限ハ又 $E(a)$ ノ点デアルカラ $\overline{ab}$ ノ間ノ点デ $E(a)$ ニ属スルモノガアル 矛盾．故ニ $\overline{p_iq_i} \to b$ 従テ $b_i \to b$．

定理ノ証明 $E(a)$ ハ連結集合デナイトスル．$E(a)=E_1$ $E_1 \neq 0$，$E_2 \neq 0$，$H(E_1, E_2) = 0$ ト出来ル．$e_1 \in E_1$，$e_2 \in E_2$ トシテ $\overline{e_1e_2}$ ヲ作ル．$\overline{e_1e_2}$ ノ間ノ点ヲ A,B 二組ニ分ケテ $x \in A$ ナラバ $\overline{ax}$ ノ最遠点ハ E_1 ニ属シ，$x \in B$ ナラバ E_2 ニ属スヤウニスル．
$\overline{e_1e_2}$ ハ連結集合ダカラ $H(A,B) \neq 0$，$\overline{AB} \neq 0$ トスル．$x \in A$，$x_n \in B$，$x_n \to x$ トナル点列ガアル．$\overline{ax}$ ノ最遠点ヲ b，$\overline{ax_i}$ ノ最遠点ヲ C_i トスレバ仮定ニヨリ $C_i \to b$ デナイカラ (2,C) ニヨリ $\overline{ab}$ ノ間ノ点ニ収斂スル．シカシ予備定理 2 ニヨリ $b_i \in E(a)$ ガアッテ C_i ト b_i ハ $E(a)$ ノ連続曲線デ結バレルカラ $b_i \in E_2$．且 $b_i \to b$．矛盾．

次ニ $E_{(a)}$ ハ連結集合ダカラ $dim.\, E_{(a)} \neq 0$. 又 $E_{(a)}$ ハ Ω ノ開集合ヲ含マナイカラ $dim.\, E_{(a)} \leqq 1$. 故ニ $dim\, E_{(a)} = 1$.

—1947. 4. 23—