45. Rが Compact な空間で R×Rが さうでない例

（阪大） 寺阪 英孝

bicompact（以下 完閉ト訳ス）な空間の積空間が完閉なことは周知であるが，単に compact（以下 $\aleph_0$完閉と訳す）な空間，即ち可附番無限集合が必ず集積点をもつ，といふ空間の積も矢張$\aleph_0$完閉なのだらうか？ と阪大の大西君が疑問を提出されたので "$\aleph_0$完閉ではないのですか？" と反問したら "第一可附番公理があれば明かなのです" とのこと。成程，第一可附番公理がないと，どうやら簡単には分らないらしい．そこで造って見たのが 表題の《Rは$\aleph_0$完閉だけれども，R×R は$\aleph_0$完閉でない》例である．こんなことは夙に知られてゐるに違ひないと思はれるが，御参考までに報告したい．……尚 此の例からも考へられるように，何等かの意味で可附番公理を伴はない$\aleph_0$完閉性は不自然である。

Rの造り方は，筆者がずっと以前，束の表現を考へてゐるとき取組んでゐた空間を模様がへしたものである．紙数を制限されてゐるから，以下 証明は一切省いて極く簡略に述べる。

§1. 0と1とからなる 0110…… の如き数列

$$a=(a^1a^2\cdots\cdots a^n\cdots)\qquad a^n=0 \text{ 又は } 1$$

の中，1が無限に多く現はれるものを全部考へ，これをAとする．次に 1が ただ有限しか現はれないものをも許したとし，二つのa, b：

$$a=(a^1a^2\cdots\cdots a^n\cdots\cdots),\qquad b=(b^1b^2\cdots\cdots b^n)$$

は有限個を除き殆んど凡てのnにつき $a^n=b^n$ ならば $a=b$ であると定め，又 a^nとb^nとの中 大なる方をC^nとしたとき

$$C=(C^1C^2\cdots\cdots C^n\cdots)$$

を以て $a\smile b$ と定義し，同様にa^nとb^nとの中 小なる方に

よつて $a \frown b$ を定義すれば，Boole代数が得られることは既知である。

今 Aの元の集合 $\{a_\lambda\}$ があつて

(i) $\{a_\lambda\}$ の どの 有限個の元を えらんでも交りが 0でなく

（有限交叉性）

(ii) 而も $\{a_\lambda\}$ に Aの 他の元を附加すると (i) の 性質が破れる

（最大性）のとき

かかる $\{a_\lambda\}$ を 素イデアル と云ふ．すると

I. ≪ 素イデアル $\{a_\lambda\}$ の組成元 a_λ の数は濃度である ≫

（Aの元 a とその補元 a' は．いづれか一方が $\{a_\lambda\}$ に属し，他が属さないことが言へるので，それから直ぐ I. が出る）

II. ≪ Aの異なる素イデアルの数は濃度 $2^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{f}$ である ≫

（I. によつて素イデアル $\{a_\lambda\}$ の組成元 a_λ の数は $\mathfrak{c}$ であるから，この元を整列させておいて．適当に順序よく考へると，異なる組合の数が $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}$ であることが分つて．II. が証明される）

III. ≪ $P=\{a_\lambda\}$ を 素イデアルとし，各の a_λ は $a_\lambda=(a^1_\lambda\ a^2_\lambda \cdots\cdots a^n_\lambda \cdots\cdots)$ だとする．このとき各項 a^n_λ を一つづつ右にづらせたもの：

$a'_\lambda=(a^0_\lambda\ a^1_\lambda\ a^2_\lambda \cdots\cdots a^{n-1}_\lambda \cdots\cdots)$（但し a^0_λ は 0, 1 任意）

を考へると $\{a'_\lambda\}$ は又素イデアル になる ≫

$P=\{a_\lambda\}$ に対して $\{a'_\lambda\}$ を P' で表はすことにする．

次に求むる空間Rの母体たる空間 R^2 を次のように定める。

先づ $g_1, g_2, \cdots\cdots g_n, \cdots$ なる可附番個の異なる点を考へ，これを R^2 の孤立点とする．

次に R^2 の残りの点を定義するのであるが，まづ $g_1 g_2 \cdots$ の無限部分集合を考へてみると，この部分集合に対しては Aの元 $a=(a^1 a^2 \cdots\cdots)$ が 一対一に対応せしめられる．即ち g_n が その部分集合に属してみれば $a^n=1$ とし，然らざれば $a^n=0$ とすれば明

そこで今 Aの凡ゆる素イデアル $P=\{a_\lambda\}$ を考へてこれを R^* の残りの点と定め，Aの元 a を含むような凡ゆる素イデアル $P=\{a_\lambda\}$ 及び a に対応する $g_1 g_2 \cdots\cdots$ の点を以て近傍と定義すれば これで R^* が近傍空間として定義されたことになる．

R^* は完閉空間であることが証明出来る．

§3. R^* を基にして R をつくらう

その為先づ $g_1 g_2 \cdots$ の無限部分集合を全部考へると これには Aの各数列 a が対応するから，濃度は $\mathfrak{c}$ である．数列 $a=(a^1 a^2 \cdots\cdots a^n \cdots\cdots)$ に対応する $g_1 g_2 \cdots\cdots$ の集積点は a を含む Aの素イデアルに外ならないから，その数は濃度 $\mathfrak{f}$ である．更に R^* の $g_1 g_2 \cdots\cdots$ 以外の可附番無限集合 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ の集積点も 小生の *Über die Darstellung der Verbände* (*Proc. Imp. Acad.* 14 (1938), 306−11) の方法を用ひると，矢張 $\mathfrak{f}$ 個あることが分る．

すると R^* の可附番無限集合の異なるものは $\mathfrak{f}$ 個である そこで $\omega_\mathfrak{f}$ を濃度 $\mathfrak{f}$ なる順序数の始数とし．R^* 中の $g_1, g_2, \cdots\cdots$ 以外の点 P_λ，及び R^* の凡ての可附番無限集合 M_λ を $\omega_\mathfrak{f}$ の同型に整列させる．

$$P_1 \ P_2 \cdots\cdots\cdots P_\lambda \cdots\cdots \quad (\lambda<\omega_\mathfrak{f})$$

$$M_1 \ M_2 \cdots\cdots\cdots M_\lambda \cdots\cdots \quad (\lambda<\omega_\mathfrak{f})$$

(1) M_1 の集積点の中．P_λ の列で最初に現はれるものを P_ν とし．これを P類の点と呼ぶ。§I の III によって P_ν' も亦 R^* の点であるが．これを P' 類の点と呼ぶ．P_ν' に更に $'$ を施した $(P_\nu')'=P_\nu''$ を P類の点と呼び，一般に P_ν^n を（n が負のときも適当に考へ）定義して $n=$ 偶数なら P類，$n=$ 奇数なら P' 類とする．（λ）一般に $\mu<\lambda$ なる μ につき P類の点と P' 類の点が定義されたとき．M_λ を考へ．M_λ の集積点の中，既に P類及び P' 類として選ばれなかつた P_λ で最初のものを P_ν とし．P_ν', P_ν'' 等を造つて前同様に P類の点，P' 類の点をきめる．

かようにすると P_λ の点はP類かP′類かのいづれかに所属せしめられることとなる．そこで $q_1 q_2$ ……及びP類の P_λ 点からなる R^* の部分集合を考へ，これを以て空間Rとする．するとRが求むる空間である．

何者，第一Rは $\aleph_0$ 完閉であるし，第二に $R \times R$ を (x, y) $(x \in R, y \in R)$ なる対で表はしたとき，(q_1, q_2)，(q_3, q_4)，(q_{2n-1}, q_{2n})，…… なる点列は集積点をもたぬことが証明されるから．　（以上）　　1947. 4. 26.