47. 永尾氏の談話31に関連して

(阪大) 中村 正弘

永尾氏は談話31(第4号)で, Remak-Schmidt の定理が Fitting の形で有限次元の modular 束でも成立することを証明されましたが, その証明を幾分簡単に出来る様に思ひますので, 以下述べさせて頂きます.

1. Lを有限次元のM束, αがLからLへの作用素で,

[1.1] 1° $0\alpha = 0$, 2° $(x \cup y)\alpha = x\alpha \cup y\alpha$, 3° $(x\alpha)\alpha = x\alpha$

[1.2] αは $1/a'$ より $a/0$ への同型写像である.

を満すとき *normal idempotent join-endomorphism* (略して <u>nije</u>) と呼ぶことにします. ただし, 1.2 で a/b と書いたのは $b \leqq x \leqq a$ を満すxの元の作るLの部分束の意味です. 1.2に出て来る a, a' はαを与えれば定まりますので, αに伴う元として *nije* に対応したローマ字で表すことにします. 1.1 と 1.2 とから, 次のことはほとんど明らかです.

[1.3] 1° $x \leqq y \to x\alpha \leqq y\alpha$, 2° $x \leqq a' \rightleftarrows x\alpha = 0$,
3° $x \leqq a \rightleftarrows x\alpha = x$.

[1.4] $a \cup a' = 1$, $a \cap a' = 0$.

1.4 の前半はαが $1/a'$ より $a/0$ への同型, つまり一対一対応であることと, $(a \cup a')\alpha = a\alpha \cup a'\alpha$ によつて $a \cup a'$ がaに対応することから, また後半は 1.3.2 と 1.3.3 を $a \cap a'$ が同時に満す事であることからわかります.

1.4 によって $1/a'$ と $a/0$ の間には第二同型定理が成立ちます. G.Birkhoff の本の定理 3.3 によって, $x \to x \cup a'$, $y \to a \cap y$ は両者の可逆同型対応となります. ところが, 1.3.3 によって,

$$x\alpha = (x \cup a')\alpha = (x \cup a')\alpha \cap a \leqq ((x \cup a') \cap a)\alpha = (x \cup a') \cap a$$

が成立しますから, 1.2 と L が有限次元であることと, $y \to y \cap a$ が $1/a'$ より $a/0$ への同型であることより

1.5 補題 α が $nije$ のときそのときのみ 1.4 の a, a' により $x\alpha = (x \cup a') \cap a$ と表示出来る.

さて, 次に

(1.6) $1 = a_1 \cup \cdots\cdots \cup a_r$, $\{a_i\}$ が独立

のとき 1.6 を 直分解 と呼びます. このとき,

(1.7) $x\alpha_i = (x \cup a_i') \cap a_i$, $a_i' = \vee_{i \neq j} a_j$

で定まる α_i を 1.6 に伴う $nije$ と名付けます. a_i の独立性から $1\alpha_i\alpha_j = 0$ ですから, 次の性質があります.

(1.8) 1° $1\alpha_i\alpha_j = 0$, 2° $x \leqq 1\alpha_i \to x\alpha_i = x$, 3° $1 = \vee_{i=1}^{r} 1\alpha_i$

ところが逆に:

1.9 補題 1.1 を満す r ケの作用素間に 1.8 が成立するならば, 1.8.3 は直分解を与える.

証: $a_i = 1\alpha_i$, $a_i' = \vee_{i \neq j} a_j$ とすれば, 1.8.2 より

$$a_i \cap a_i' = (a_i \cap a_i')\alpha_i = (1\alpha_i \cap \vee_{i \neq j} 1\alpha_j)\alpha_i \leqq 1\alpha_i \cap \vee_{i \neq j} 1\alpha_j\alpha_i = 0$$

となりますから $\{1\alpha_i\}$ は独立となります. 従って 1.8.3 は一つの直分解です.

2. 永尾氏の前記の談話 31 の定理 11 と 12 を証明します.

2.1 定理 二つの直分解

$$1 = a_1 \cup \cdots \cup a_r = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_s$$

が共通の細分解を持つとき, そのときのみそれらに伴う $nije$ の間に $1\alpha_i\beta_j = 1\beta_j\alpha_i$ が成立つ

証: 必要性: ここで共通の細分解であるとは, 第3の直分解 $1 = c_1 \cup \cdots\cdots \cup c_t$ が存在して, c_i によって a_i, b_j が直分解表示

を持つ事を意味します．従って $\{c_i\}$ は Boole 束 B を作り，a_i と b_j を B に含みます　B 内では配分法が成立しますから，I.5 によって

$$1\alpha_i\beta_j=(a_i\cup b_j')\cap b_j=a_i\cap b_j=1\beta_j\alpha_i$$

充分性：　$\gamma_K=\alpha_i\beta_j$ と置けば，γ_K について 1.1.1，~1.1.2，1.8.1，1.8.3 が成立することは明らかです．又た仮定から，

$$1\gamma_K=1\alpha_i\beta_j\cap 1\beta_j\alpha_i=a_i\cap b_j$$

が成立しますから，$x\gamma_K\leqq a_i\cap b_j$ がすべての x について成立ちます．ところが $x\leqq a_i\cap b_j$ となる x については 1.3.3 によって $x\gamma_K=x$ ですから，1.1.3 と 1.8.2 とが成立します．従って 1.9 によって $1=V_K\gamma_K$ は直分解となります．その上，a_i または b_j の任意のものについて，例へば

$$a_i=1\alpha_i=(V_K1\gamma_K)\alpha_i=V_j1\beta_j\alpha_i$$

が成立しますから，これが a_i と b_j に共通な細分解を与へます．

2.2 定理　　1.6 が他の任意の直分解について細分解きるならば，またそのときに限り $a_i\beta\leqq a_i$ が任意の n_{ij} β について成立つ．

証：　必要性：　β に伴う分解を $1=b\cup b'$ とすれば，仮定によって 1.6 と細分解出来ることになりますので，2.1 の必要性の証明と同じ様に，b,b',a_i を含む Boole 束が存在しますから，

$$a_i\beta=(a_i\cup b')\cap b=a_i\cap b\leqq a_i$$

充分性：　　2.1 の二つの直分解が与へられたとします．

まず仮定より，　　$1\alpha_i\beta_j=a_i\cap b_j$

が成立しますから，2.2 の充分性の証明と同じに 1.1，1.8 の成立が $\gamma_K=\alpha_i\beta_j$ についていえます．従って 1.9 によって $\{1\gamma_K\}$ は直分解を与えます．これが細分解であることの証明は次元を考へる必要があります．その部分では永尾氏の証明と同じです．

1947.5.6