52. 全微分方程式ノ積分ニ就テ. (Ⅲ)

(広島文理大) 占 部 實

§7. Natain ノ方法トノ関係

$$\Omega \equiv X_i dx^i \qquad (7.1).$$

ニ於テ
$$\left.\begin{aligned} \underset{p}{\overset{\lambda}{x}} &= x^{\lambda-1} \quad \text{for} \quad \lambda \leqq p \\ \underset{p}{\overset{\lambda}{x}} &= x^{\lambda+1} \quad \text{for} \quad \lambda > p \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{aligned} &p = 1, 2, \cdots\cdots, n-1 \\ &\lambda = 2, 3, \cdots\cdots, n-1 \end{aligned}\right)$$

ナル如クエラブ。点 $P_0, P_1, \cdots\cdots, P_{n-1}$ ノ座標ハ次ノ如ク書クコトが出来ル。

$$\left.\begin{array}{lllllll}
P_0: & \underset{0}{x}^1, & \underset{0}{x}^2, & \underset{0}{x}^3, & \underset{0}{x}^4 \cdots\cdots\cdots & \underset{0}{x}^{n-2}, & \underset{0}{x}^{n-1}, & \underset{0}{x}^{n} \\
P_1: & \underset{0}{x}^1, & \underset{0}{x}^2, & \underset{0}{x}^3, & \underset{0}{x}^4, \cdots\cdots\cdots & & , & \underset{0}{x}^{n} \\
P_2: & \underset{1}{x}^1, & \underset{2}{x}^2, & \underset{2}{x}^3, & \underset{0}{x}^4 \cdots\cdots & & , & \underset{0}{x}^{n} \\
\vdots & & & & & & & \\
P_{n-2}: & \underset{1}{x}^1, & \underset{2}{x}^2, & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots, & \underset{n-2}{x}^{n-2}, & \underset{n-2}{x}^{n-1}, & \underset{0}{x}^{n} \\
P_{n-1}: & \underset{1}{x}^1, & \underset{2}{x}^2, & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots, & \underset{n-2}{x}^{n-2}, & \underset{n-1}{x}^{n-1}, & \underset{n-1}{x}^{n}
\end{array}\right\} \quad (7.3)$$

此時 條件 Δ ノ Δ ヲ作レバ Δ ハ符号ヲ除イテ次ノ如クナル。

$$\Delta = X_2 X_3 \cdots\cdots\cdots X_{n-1} \qquad (7.4)$$

サテ $\Omega=0$ ガ integrable ナル時，例ヘバ $X_1=0$ ナラバ $\Omega=0$ ノ integral ヲ $\varphi(x)=const.$ トスレバ $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}=0$ ∴ $\varphi(x)$ ニ対応スル integrating factor ヲ λ トスレバ $\lambda X_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ ニシテ右辺ハ x^1 ヲ含マヌ故 $X_2:X_3:\cdots\cdots:X_n$ ハ x^1 ヲ含マナイ。即チ x^1 ハ各項ノ common factor トシテノミハ入ッテヰル。依テ $\Omega=0$ ニ於テ此ノ common factor ヲ除ケバ結局 Ω ハ x^1 ヲ全然含マヌコトニナル。即チ $X_1=0$ ナラバ $\Omega=0$ ハ x^1 ヲ全然含マヌ $X_2dx^2+\cdots\cdots+X_ndx^n=0$ ニ帰着セシメルコトガ出来ル。依テ $\Omega=0$ ニ於テ X_i ノ中 0 ノモノガ若干個アレバ，common factor ヲ除ケバ $\Omega=0$ ハ夫等ノ X_i ニ対応スル x^i ヲ含マヌ方程式ニナリ，残リノ X_i ハ全部 0 デナクナル。[1] 依テ integrable ナ方程式 $\Omega=0$ ヲ問題トスル限リ最初ヨリ上ノ reduction ガ行ハレタモノト考ヘテ，スベテノ X_i ハ 0 デナイトシテヨイ。我々ハ以下ニ於テハ此仮定ノモトニ議論ヲ進メル。然ルトキ (7.4) ヨリ $\Delta\neq0$ 依テ (7.2) ノ如クエラバレタ $\underset{p}{\overset{\lambda}{x}}$ ハ条件 Δ ヲ満足スル。

然ルトキ §6. ノ f_p ハ次式ニヨリテ決定サレル。

$$X_p dx^p+X_{p+1}dx^{p+1}=0 \qquad (p\text{ - not summed}) \tag{7.5}$$
$$(x^1,\cdots\cdots,x^{p-1},\ x^{p+2},\cdots\cdots,x^n=const.)$$

而モ f_p ハ $\underset{p}{\overset{\lambda}{x}}$ ニ独立デナケレバナラヌ。即チ f_p ハ (7.5) ノ integral ニシテ少クトモ x^p, x^{p+1} ノ中何レカヲ含ムモノデナケレバナラヌ。コレハ X_p, $X_{p+1}\neq0$ ヨリ可能デアル。然ルトキ (6.20) ハ (7.3) ノ表ヨリ次ノ如クナル。

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(\underset{0}{x^1},\underset{0}{x^2},\underset{0}{x^3},\cdots\cdots,\underset{0}{x^n})=f_1(\underset{1}{x^1},\underset{1}{x^2},\underset{0}{x^3},\cdots\cdots,\underset{0}{x^n})\\
&f_2(\underset{1}{x^1},\underset{1}{x^2},\underset{0}{x^3},\cdots\cdots,\underset{0}{x^n})=f_2(\underset{1}{x^1},\underset{2}{x^2},\underset{2}{x^3},\underset{0}{x^4},\ \ ,\underset{0}{x^n})\\
&f_{n-1}(\underset{1}{x^1},\underset{2}{x^2},\cdots,\underset{n-2}{x^{n-2}},\underset{n-2}{x^{n-1}},\underset{0}{x^n})=f_{n-1}(\underset{1}{x^1},\underset{2}{x^2},\cdots,\underset{n-2}{x^{n-2}},\underset{n-1}{x^{n-1}},\underset{n-1}{x^n})
\end{aligned}\right\}\tag{7.6}$$

(1) $\Omega=0$ ニ於テ $X_i=0$ ナラバ x^i ガ common factor トシテノミハ入ッテヰルトイフコトハ $\Omega=0$ ガ integrable ナルタメノ一ツノ必要条件デアル。

(6.20) ヨリ $x_1^i, x_2^i, \cdots\cdots, x_{n-2}^i$ ヲ消去スルコトハ (7.6) ニ於テハ $x_1^2, x_2^3, \cdots\cdots; x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去スルコトデアル．若シ $\Omega=0$ ガ *integrable* ナラバ §6. ノ一般論ニヨリ (7.6) ヨリ $x_1^2, x_2^3, \cdots\cdots, x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去セル結果ハ次ノ形トナル。

$$\Phi(x_0^1, x_0^2, \cdots\cdots, x_0^n) = \varphi(x_1^1, x_2^2, \cdots\cdots, x_{n-1}^{n-1}, x_{n-1}^n) \qquad (7.7)$$

ソシテ此時得ラレタ $\Phi(x)=const.$ ガ求ムル $\Omega=0$ ノ *integrate* トナル。

(7.6) ニ於テ x_0^i ノ代リニ x^i ト書キ，$x_1^1, x_2^2, \cdots\cdots, x_{n-1}^{n-1}$ = *special value* ヲアタヘ，$x_{n-1}^n = C$ ($C=const.$) トオキ (7.7) ヲ C ニツイテ解ケバ

$$F(x) \equiv F(\Phi(x), x_1^1, x_2^2, \cdots\cdots, x_{n-1}^{n-1}) = C \qquad (7.8)$$

此処デ $x_1^1, x_2^2, \cdots\cdots, x_{n-1}^{n-1}$ ハ常数デ $\Phi(x)=const.$ ハ $\Omega=0$ ノ *integral* デアルカラ $F(x)=C$ ガ又 $\Omega=0$ ノ *Integral* トナル。サテ $f_{n-1}(x_1^1, \cdots\cdots, x_{n-1}^{n-1}, C) = C'$ トオケバ $C'=const.$ トナル。是ニ (7.8) ヲ代入シ

$$\psi(x) \equiv f_{n-1}(x_1^1, x_2^2, \cdots\cdots, x_{n-1}^{n-1}, F(x)) = C' \qquad (7.9)$$

トスレバ $F(x)=const.$ ガ *integral* デアルカラ

$\psi(x)=const.$ ガ又 $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。即チ (7.6) ノ最後ニ於テ．

$$f_{n-1}(x_1^1, x_2^2, \cdots\cdots, x_{n-2}^{n-2}, x_{n-2}^{n-1}, x_0^n) = C' \qquad (7.10)$$

トオキ　$x_1^1, x_2^2, \cdots\cdots, x_{n-2}^{n-2}$ = *special value* ヲアタヘ，$x_1^2\ x_2^3 \cdots\cdots, x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去シテ得タル式ヲ C' ニツキ解ケバ $\psi(x)=C'$ ヲ得ル，此時 $\psi(x)=const.$ ガ $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。是 *Natani* ノ方法デアル。[1]

サテ $\Omega=0$ ガ *integrable* デナイ場合ハ[2]，§6. ノ一般論ニ依リ (7.6) ヨリ　$x_1^2, x_2^3, \cdots\cdots, x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去セル結果ノ式ハ次ノ形デアッテ

---

(1) *Forsyth, Theory of Diff. Eq. I. p.27–30.*

(2) スベテノ $X_i \neq 0$ ナル仮定ハ残シテオク．

$$\overset{1}{\Phi}(\underset{0}{x}^1, \underset{0}{x}^2, \cdots\cdots, \underset{0}{x}^n ; \underset{1}{x}^1, \underset{1}{x}^2 \cdots\cdots, \underset{n-1}{x}^{n-1}, \underset{n-1}{x}^n)=0 \quad (7.11)$$

是ハ決シテ（7.7）ノ形トハナラナイ。然シ Natain ノ方法ニ於ケルガ如ク $\underset{1}{x}^1, \underset{2}{x}^2, \cdots\cdots \underset{n-2}{x}^{n-2}, \underset{n-1}{x}^{n-1}$ = *special value* ヲアタヘ，$\underset{n-1}{x}^n = C$ トシテ（7.11）ヲ C ニツキ解ケバ次ノ形ノ式ガ得ラレル。

$$F'(\underset{0}{x}) = C.$$

$\underset{n-1}{f}(\underset{1}{x}^1, \cdots, \underset{n-1}{x}^{n-1}, C)$ C′ トスル時

$$\Psi(\underset{0}{x}) \equiv \underset{n-1}{f}(\underset{1}{x}^1, \underset{2}{x}^2 \cdots\cdots, \underset{n-1}{x}^{n-1}, F'(x)) = C'$$

トナル。$\underset{0}{x}^i$ ヲ x^i ト書ケバ $\psi'(x) = C'$. 是ハ一見 $\Omega = 0$ ノ *integral* ノ如キ形ヲシテヰルガ，（7.11）ガ（7.7）ノ形トナラナイノデアルカラ $\psi'(x)$ ハ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ノ時ノ

$$\psi(x) \equiv \underset{n-1}{f}[x^1, \cdots\cdots, \underset{n-1}{x}^{n-1}, F(\phi(x), x^1, \cdots\cdots, \underset{n-1}{x}^{n-1})]$$

$$= \textit{function of } \{\phi(x), \underset{1}{x}^1, \cdots\cdots, \underset{n-1}{x}^{n-1}\}$$

ノ形トハナラナイ。$\psi'(x) = C'$ ハ結局（7.11）ノ單ナル変形デアッテ，決シテ $\Omega = 0$ ノ *integrable* トイフ意味ハナイノデアル。カク Natani ノ方法ニアリテハ演算ノ結果ハ *integrable* ナル場合モ然ラザル場合モ常ニ同一ノ形ノ式ヲ得，結果ノ式ダケデハ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナリヤ否ヤハ判定出来ナイ。然シ上述ノ議論ヨリ明ラカナル如ク $\underset{1}{x}^1, \underset{2}{x}^2, \cdots\cdots, \underset{n-1}{x}^{n-1}$ = *special value* ヲアタヘズ，常数トシテソノママ文字ヲ殘シ消去ヲ実施スル時ハ §6. ノ一般論ヨリ消去サレタ結果ガ（7.7）ノ形トナルトキハ *integrable* デアリ，然ラザル時ハ *non integrable* ナルコトガ分ル。

以上ノ議論ヨリ Natain ノ方法ハ Reymond ノ方法ニ於テ $\underset{p}{\overset{\lambda}{x}}$ トシテ（7.2）デアタヘラレル如キ函数ヲ取ッタ特別ノ場合デアルコトガ分ッタ。

§6 ニ於テ Fp ヲ（6.27）デ定義スル方法ニ於テ 特ニ $\overset{\lambda}{x} = x^{\lambda+1}$ トスレバ $\underset{p}{f}$ ハ次式ノ積分トナル。

$$X_1 dx^1 + X_{p+1} dx^{p+1} = 0 \qquad (p=1,2,\cdots,n-1) \qquad (7.12)$$

此場合ノ議論ハ（7.5）ノ場合ノ議論ト全ク同様デアル。従テ是ヨリ Natani ノ方法ト同様ナ一ツノ解法ガ得ラレル。然シ其ハ本質的ニハ Natani ノ方法ト異ナルモノデハナイカラ議論ハ一切省略スル。

Natani ノ方法ニアリテハ x_0^i ノ代リニ x^i ト書キ，$x_{n-1}^n (= x_1^1)$，$x_{n-1}^2 (= x_2^2)$，……，x_{n-1}^{n-1} = *special value* ヲアタヘ．$x_{n-1}^n = C$ トオキ，消去式ヲ（7.7）ノ形ニ変形シテ *integral* ヲ求メル代リニ，消去式ヲ C ニツキ解キ *integral* ヲ求メテヰル。此方法ハ一般ノ *Reymond* ノ方法ニモ適用セラレルコトハ明ラカデアル。何トナレバ（7.7）ヨリ（7.8）ニ至ル過程ハ一般ノ *Reymond* ノ方法ニツイテモアテハマルカラデアル。但シ勿論之ガ許サレルノハ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナル場合ニ限ラレテヰルコトハ（7.11）ニ就テ論ジタ事ヨリ明ラカデアル。