

53. 等距離集合に就て (II)

津田 大 夫

此處で述べたいことは切線が正則点で連続であること及曲線Eの長さ $l(E)$ と書くとき $\lim_{n \rightarrow 0} l(E(n)) = l(E)$ であることが云ひ得ることである。

$x \in E(n)$ に対して $x \in \text{Front} \cup (x', n)$ $x' \in E$ なるとき $x \leftrightarrow x'$ が對應すると云ふ。そして $E(n) \ni x \leftrightarrow x' \in E$ とかく。又 $\Delta(n) = E \cap (E(n) \ni x \rightarrow x' \in E)$ と書く。又 $\Delta = \sum_{a > n > 0} \Delta(n)$ とおくと、次の命題によつて Δ は a と無關係なことが判る。

$n < n'$ であれば $\Delta(n) \supseteq \Delta(n')$ である。

$A \in \Delta(n')$ とすると $B \in E(n')$ が存在して $\text{dis}(A, B) = a'$ となる。

又 $C \in \overline{AB}$ $\text{dis}(A, C) = n$ とす。 $C \in E(n)$ とすれば $\frac{\text{dis}(C, x)}{n} < n$ なる x が存在せねばならぬ。そこで $\text{dis}(B, x) < \text{dis}(B, C) + \text{dis}(x, C) < (n - n) + n = n'$ 然るに $\text{dis}(B, x) \geq \text{dis}(B, E) = n$ にちぢゆんする。故に $C \in E(n)$ 故に $\text{dis}(C, A) = n$ より $A \in \Delta(n)$ 故に。

$\Delta(n) \supseteq \Delta(n')$

$\Delta(n)$ は有界閉集合である。

$P_n \in \Delta(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $P_n \rightarrow P$ とする。さて $\Delta(n) \ni P_n \rightarrow q_n \in E(n)$ $\text{dis}(P_n, q_n) = n$ 。さて $E(n)$ は有界閉集合なる故 *Bolzano-Weierstrass* の定理によつて $\{q_n\}$ の部分列 $\{q_{n_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) 然も $q_{n_k} \rightarrow q$ である。さて $P_{n_k} \rightarrow P$ ところで容易に判るが $\text{dis}(P, q) = n$ となる。即ち $q \in \Delta(n)$ 即 $\Delta(n)$ は閉集合である。

さて E が *Jordan* 閉曲線なるとし Γ と書くことにする。すると次が成立する。

Δ は Γ に於て稠密である。

[証明] $A \in \Gamma$ に対して任意の近傍 $U(A, \rho)$ を作る。それに対して $U(A, \frac{\rho}{2})$ を作り $B \in U(A, \frac{\rho}{2}) \cdot C[\Gamma]$ $C \supseteq I[\Gamma]$ とは Γ の内部領域 $C[\Gamma]$ とは Γ の外部とする。又 B と ∞ を連続曲線 Λ で結ぶ。但し Λ は $C[\Gamma]$ に

属す. $dis(A, P) = \alpha \leq dis(A, B) < \frac{\rho}{2}$ である. すべて $\sigma < \max(dis(A, P), \frac{\rho}{2})$ をとり $P(\sigma)$ を考える. すると $P(\rho)$ は円 $U(A, \rho)$ を二分する. 然して A, B はその異なる部分に属す. 然も \overline{AB} は全く $U(A, \rho)$ に属す. 故に \overline{AB} と $P(\sigma)$ とは必ず交る. その点を D とせば $P(\sigma) \ni D \rightarrow C \in \Delta(\sigma) \subset \Delta$. $dis(A, C) \leq dis(A, D) + dis(D, C) \leq dis(A, B) + \sigma < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$ 即任意の $\rho > 0$ に對して $\Delta \ni C$ が存在し $U(A, \rho) \ni C$ となる. 即 Δ は P に於て稠密である. (証明完了)

あとの $\lim_{\rho \rightarrow 0} l(P(\rho)) = l(P)$ を示すためには $l(\Delta) = l(P)$ ではないかと思つてみたのですが次の例を近藤先生が與へられました.

[0 1] 区間を分割する. 先づ [0, 1] の中に長さ u_0 の区間 u_0 を一つとる. せして 0 と u_0 の左側区間を I_0 とし, $1 - u_0$ の右側区間を I_1 とする. 次は I_0, I_1 の中に一つずつ u_2 をとる. せして I_0 の u_1 の左側区間を I_{00} とし右側区間を I_{01} とする. I_1 の u_1 の左側区間を I_{10} , 右側区間を I_{11} とする. 以下同様にする. せして u_k の上の高さ v_k の細い大形を作る. 但し $v_k = u_k \cdot c/2^k (k+1)^2$ とすれば確かに [0, 1] 上の点は此の曲線 P の Δ には含まれないことが判る. 此のとき P の長さは有界であり $P - \Delta$ の linear measure は勿論零でない.

定理 2 P を單一 Jordan 閉曲線とする. かつ $l(P) < +\infty$ とするとき $\lim_{\rho \rightarrow 0} l(P(\rho)) = l(P)$

[証明] Δ は P に於いて稠密なる故その中に点 P_1, P_2, \dots, P_n をとり, $|l(P) - l((P_i)_\rho^m)| < \epsilon$ を与らしめうる. 但し $\epsilon > 0$ は与えられてゐるものとし, $(P_i)_\rho^m$ とは (多角形 P_1, P_2, \dots, P_n) を繋記したものである. $\Delta \ni P_i$ に對して ρ_i が定まり $\Delta(\rho_i) \ni P_i$ 故に $\min(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \rho$ とおくと $\Delta(\rho) \ni P_i (i=1, 2, \dots, n)$ さて P_i に對して $P(\rho)$ 上には q_i をとる. その上 q_{n+1}, q_n, \dots, q_m を新たにとつて $|l(P(\rho)) - l((q_i)_\rho^m)| < \epsilon$ としよ. さて q_{n+1}, \dots, q_m に對應する P の点を P_{n+1}, \dots, P_m とするとき, $l(P) > l((P)_\rho^m) > l((P)_\rho^m)$ よつて $|l(P) - l((P)_\rho^m)| < \epsilon$ さて $(q_i)_\rho^m(\rho) \subset (P_i)_\rho^m$ と $P(\rho)$ の蓋きの關係を見るに $(q_i)_\rho^m(\rho) \ni P$

$(j=1, 2, \dots, m)$ 法も $(P_i)^m$ は P_j を頂点とする多角形である、故に
 $l\{(q_i)^m(\Omega)\} > l((P)^m)$ である。さて次に $(q_i)^m(\Omega)$ の P_i と P_{i+1} の
 部分を一つとつてくると、 P_i から A 迄が円弧、それを $\widehat{P_i A}$ 、次に A より B 迄
 が場合、それを \overline{AB} 、次に B より P_{i+1} 迄が円弧、それを $\widehat{B P_{i+1}}$ とあらわす
 さて A 及び B に対して \overline{AB} に垂線を立て $P(\Omega)$ と交る点を A', B' とする。する
 と、 $P(\Omega) \cap_{A'}^{B'}$ (即ち $P(\Omega)$ の A', B' の間の弧) は一般に直線でない。又直
 線であれば \overline{AB} は平行四辺形の対辺であるから長さが等しい。いづれにしても
 $l(P(\Omega) \cap_{A'}^{B'}) \geq l(\overline{AB})$ 、次に $P(\Omega) \cap_{P_i}^{A'}$ と $\widehat{P_i A}$ との比較であるが $\widehat{P_i A}$
 は $U(q_i, \Omega)$ の *Front* の点であるが $P(\Omega)$ は $U(q_i, \Omega)$ の内部の点ではない
 ことに注意する。そこで q_i, A, A' が一直線上にある。さて $\widehat{P_i A}$ 上に点
 M_1, M_2, \dots, M_k をとり $q_i M_i$ が $P(\Omega)$ との交点を N_1, N_2, \dots, N_k とする。さて
 $\varepsilon > 0$ に対して上の様に M を適当にとると、 $|l(\widehat{P_i A}) - l(M_i)^k| < \varepsilon$ とならし
 めうる。さて $N_k \in P(\Omega)$ は円 $U(P_i, \Omega)$ の外にある故に $l(N_k, N_{k+1})$
 $\geq l(M_k, M_{k+1})$ ($k=1, 2, \dots, k$)、そこで $l(P(\Omega) \cap_{P_i}^{A'}) \geq l((N_j)^k) \geq l((M_j)^k)$
 $\geq l(\overline{P_i A}) - \varepsilon$ 。 ε は任意であるから結局 $l(P(\Omega) \cap_{P_i}^{A'}) \geq l(\widehat{P_i A})$ を得る。
 よって結局 $l(P(\Omega) \cap_{P_i}^{P_{i+1}}) \geq l\{[(q_i)^m(\Omega)] \cap_{P_i}^{P_{i+1}}\}$ 、そこで $l(P(\Omega))$
 $\geq l[(q_i)^m(\Omega)] \geq l((P)^m)$ 、故に $|l(P(\Omega)) - l((P)^m)| < \varepsilon$ である。
 さて今度は $|l(P) - l((P)^m(\Omega))| < \varepsilon$ と示したいが P が $\sum_{x \in P(\Omega)} U(x, \Omega)$
 と共通点を持たぬから前と全く同じ論法が成立して云ひ得る。然るに次の関係が
 成立してゐる。即、

$$l[(q_i)^m(\Omega)] - l[(P_i)^m(\Omega)] = 2\pi r$$

$$\text{そこで } 2\pi r - n\varepsilon < |l(P) - l(P(\Omega))| < 2\pi r + 2\varepsilon$$

さて上の r の定め方では $\varepsilon > 0$ に対して P_1, P_2, \dots, P_n が定り。それに対して
 $\Delta(\Omega) \ni P_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) として Ω を定めた。が此處で $r < \varepsilon$ と假定して差
 支へない。何となれば $r > \varepsilon > \varepsilon'$ ならば $\Delta(\Omega) \subset \Delta(\varepsilon')$ なる故 ε'
 をあらためて r にとるとよい。そのときは

$$(2n-2)\varepsilon < |l(P) - l(P, \varepsilon)| < (2n+2)\varepsilon$$

故に $\lim_{n \rightarrow \infty} l(P(\Omega)) = l(P)$ [証明完了]

定理 3; $E(\Omega)$ の正則点 (即角点でない点) に於て切線は直線である。

証明 今命題を正しくないとして点 A は正則点でありながら切線はどこも不連続と仮定すれば毛じゆんすることを示したい。さて曲線 $E(\Omega)$ の点 X における切線が実定直線となす角を $\theta(X)$ で表すとすれば $\{X_i\} (i=1, 2, \dots)$ が $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = A$ であるとき $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta(X_i) = \theta_0 \neq \theta(A)$ なる $\{X_i\}$ がある筈である。すると $E(\Omega) \ni X_i \rightarrow Y_i \in \Delta(\Omega)$ がある。然も前に $\Delta(\Omega)$ は閉集合なることを示したから $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = Y$ となれば A と Y は対応する。然して又 $A \rightarrow A' \in \Delta(\Omega)$ なる A' が存在する。然も $A \neq Y$ である。何となれば $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta(X_i) = \theta_0$ より $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta(X_{i_k}) = \theta_0$ である。よつて與へられた $\varepsilon > 0$ に對して N_1 を定めると $n > N_1$ に對して $|\theta_0 - \theta(X_{i_n})| < \varepsilon/n$ が成立する。次に $\lim_{m \rightarrow \infty} X_{i_m} = A$ なる故に $\varepsilon > 0$ に對して N_2 が定まり $m > N_2$ ならば $\text{dir}(X_{i_m}, A) < \varepsilon$ であり $\max(N_1, N_2) = N$ とおくと $m > N$ とすれば $\text{dir}(X_{i_m}, A) < \varepsilon$ かつ $|\theta_0 - \theta(X_{i_m})| < \frac{\varepsilon}{n}$ となる。そこで A より長さ n の細分 AB_0 及び AB_m を $AB_m \parallel X_m Y_m$ $AB_0 \parallel \lim_{m \rightarrow \infty} (X_{i_m} Y_{i_m})$ なるが如くにとる。すると $\text{dir}(AX_m) = \text{dir}(B_m Y_m) < \varepsilon$ であり $\Delta A' B Y_m$ に於て

$$\begin{aligned} \text{dir}(A' Y_m) &\geq \text{dir}(A' B_0) - \text{dir}(B_0 B_m) - \text{dir}(B_m Y_m) \\ &\geq n \sin(\theta(A) - \theta_0) - 2n(\theta_0 - \theta(X_{i_1})) - \varepsilon \\ &\geq n \sin(\theta(A) - \theta_0) - 3\varepsilon \end{aligned}$$

そこで $m > N$ なる故に $m \rightarrow \infty$ でも成立する。

$\text{dir}(A' Y) \leq n \sin(\theta(A) - \theta_0) - 3\varepsilon$ 比ゆて ε は任意である。そこで $\text{dir}(A' Y) \leq n \sin(\theta(A) - \theta_0) > 0$ 即ち $A' = Y$ である。即ち A は二つの異つた点 $A' Y$ が対応する。即ち A は正則点でない即ち毛じゆんである。 (証明完了)

さて此處で $P(\Omega) \ni P \rightarrow \Sigma \in \Delta(\Omega)$ の對應で或る定まつた点 O を夫々の点としてその点より同一方向に O 点よりの長さによる座標を $P(\Omega), \Delta(\Omega)$ の点に與へる。一歸に前者を Σ で後者を S で表すと記す。そのとき β 點に對する $P(\Omega)$ の点の座標 Σ は S の函数を考へらぬ其を $\Sigma(S)$ で表す。

すると次が成立する。

$t(S)$ は S についての有界連続増加函数である。此は $P(p) \rightarrow P_1, P_2 \rightarrow q_1, q_2 \pm \Delta(\eta)$ が夫々對應するとき、 $\overline{P_1 q_1}$ と $\overline{P_2 q_2}$ が交らぬということである。此は当然である。もし交つたとすれば $dis(P_1 q_1) = dis(P_2 q_2) = \eta$ として $dis(P_1 q_2) \geq \eta, dis(P_2 q_1) \geq \eta$ でなければならぬ。然しもし前者が成立するとせば $\Delta P_1 q_1 q_2$ に於いて $dis(P_1 q_2) \geq dis(P_1 q_1)$ そこで $\angle P_1 q_2 q_1 \geq \angle P_1 q_1 q_2$ となればならぬ。すると $\angle P_2 q_1 q_2 > \angle P_2 q_2 q_1$ 即ち、 $dis(q_1 P_2) < dis(P_2 q_2) = \eta$ 此は後者にむじゆんする。

及此の逆即ち $t(S) \geq 0$ なる有界連続増加函数が与へられたとき上の様な意味で $t(S)$ を持つ種々の四線 P が必ず存在することを示したいが其は少し長くなるので此の次にまわしたい。そして次のことを注意したい。

此處で $t(S) = t$ は殆どすべての S につき微分可能である。そして今 P の S 点の X, Y 座標を $x(S), y(S)$ と表し $P(\eta)$ のそれらを $X(t), Y(t)$ で表せば、

$$X(t) = x(S) - \eta \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

$$Y(t) = y(S) -$$

よつて此は $\frac{dy}{ds} = [X(t), Y(t), x(S), y(S)]$

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}$ について同様 そこで $\frac{dt}{ds}$ が存在する点で $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}$ が存在する。然して此が又 $X(t), Y(t), x(S), y(S)$ で表はされる。そこで同一論法を施せば $\frac{dt}{ds}$ が存在する点では $x(S), y(S), X(t), Y(t)$ が何層にも微係数を持つことが云ひ得る。当然殆どすべての S 点で $P(\eta)$ は曲率円をもつ。 (つづく)

(1947. 5. 20)