57. Schauder-Tychonoff ノ不動点定理ニ就テ

（阪大）　野 水 克 己

Schauder ガ Stud Math 2 (1930) デ linear metric space ニ於ケル不動点定理ヲ與ヘ Tychonoff ハ Math. Ann. 111 (1935) デ必ズシモ metrisable デナイ linear topological space ノ場合ニ ソレガ locally convex デアルトイフ條件ノ下ニ擴張シテ證明シ

デアル。併シ locally convex トイフ仮定ハ不要デ全ク一般ノ linear topological space ニ於テ定理ガ成立スル。ヨク用ヒラレル定理デアルガソノ後コノコトヲ注意シテアルノヲ見ナイヤウニ思フノデ以下ソレヲ述ベル。

定理 linear topological space ノ convex, compact set ノ其自身ヘノ連続写像ニハ必ズ不動点ガ存在スル。

(証明) metric ノアル場合ノ Schauder ノ証明ハ不完全ナノデ ソレヲ訂正シ ソレガ一般ノ場合ニモ殆ンド ソノマヽ(metric ノ代リニ uniform structure ヲ用ヒテ)成立ツコトヲ注意スル。

1° metric ノアル場合

linear metric space R ノ metric ρ ハ $\rho(a,b)=\rho(a-b)$ ヲ満足スルトシテヨイ。次ノ Lemma ハ全ク容易ニ証明出来ル。

Lemma 任意ノ整数 n $(\geqq 2)$ 及任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ次ノヤウナ $\delta=\delta(n,\varepsilon)$ ガ存在スル: $x_1 \cdots x_n \in R$ ヲ $\rho(x_i,x_j)<\delta$ $(i,j=1,\dots,n)$ ナルヤウニトレバ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, $\lambda_i\geqq 0$ ナル任意ノ $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ニ對シ $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ ハ $\rho(x,x_k)<\varepsilon$ $(k=1,\dots,n)$ ヲ満足スル。

R ノ convex, compact set ヲ H, 連続変換ヲ f, $f(H)\subset H$ トスル。
H ガ compact ナコトカラ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ H ノ ε-net $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ ガ存在スル。$\xi_1,\dots\dots,\xi_s$ ヲ張ラレル convex, closed set ヲ H_0 トスルト明ラカニ $H_0\subset H$. H_0 ハ有限次元ノ complex ト考ヘラレルカラ ソレヲ分割シテ、ソノ各一ツノ simplex ノ頂点ハ互ニ Lemma ノ $\delta(n,\varepsilon)$ (但 $\dim H_0=n-1$ トスル) 以下ノ距離ニアルヤウニスル。コノ分割サレタ complex ヲ H_0 デ表シ、H_0' ニ於ケル連続変換 f' ヲ次ノヤウニ定義スル。d ヲ H_0 ノ一ツノ Simplex ノ頂点トスルトキ、$\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ ガ H ノ ε-net ナルコト及ビ $f(H)\subset H$ ナルコトカラ $\rho(f(d),\xi_i)<\varepsilon$ ナル ξ_i ガ存在スル。ソノ ξ_i デ $f'(d)=\xi_i$ トオク。H_0' ノ simplex ノ頂点ニ對シテコノヤウニ定義サレタ f' ヲ H_0' 全体ニ連続ニ拡張スル。例ヘバ simplex $(d_1,\dots,d_n)$ ノ点 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i$ $(\alpha_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1)$ ニ對シテ $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f'(d_i)$ トスレバヨイ。明ラカニ $f(H_0')\subset H_0'$ (ココ

マデハ Schaader ノ通リデアル). マタ Lemma ニヨリ H_0' ノ各 simplex 内ノ任意ノ点カラソノ simplex ノ任意ノ頂点ヘノ距離ハ ε 以下デアルコトニ注意スル.

次ニ topology デヨク知ラレテヰルヤウニ complex H_0' ヲ更ニ分割ヲ細カクスルコトニヨリ（ソノ際重心分割ヲ用ヒルコトニスル）. 分割サレタ complex H_0'' カラ H_0' ヘノ連続変換 f' ヲ H_0'' カラ H_0' ヘノ simplicial mapping f''（H_0'' ノ simplex ガ H_0' ノ simplex ヘ移ルヤウナ）デ近似スル サウスレバ d ヲ H_0' ノ simplex ノ頂点トスルトキ f' ノ定義カラ,

(1) $\rho(f(d), f'(d)) < \varepsilon$

マタ d ヲ H_0'' ノ simplex ノ頂点トスレバ f'' ノ定義カラ

(2) $\rho(f(d), f''(d)) < \varepsilon$

ガ成立ツ.

サテ f'' ハ有限次元ノ convex. compact set H_0'' ノソレ自身ヘノ連続変換デアルカラ不動点 x_0 ヲモツ.

(3) $f''(x_0) = x_0$

x_0 ノ属スル H_0'' ノ simplex ノ頂点デ同時ニ H_0' ノ simplex ノ頂点デアルモノヲ d トスル. カカル頂点 d ノ存在ハ H_0' カラ H_0'' ヘノ分割ニ重心分割ヲ用ヒタコトカラ分ル. コノ d ニ対シテ (1), (2) ガ同時ニ成立ツ. マタ f'' ガ simplicial デアルコトカラ $f''(x)$, $f''(d)$ ハ H_0' ノ同ジ simplex 属

(4) $\rho(f''(x_0), f''(d)) < \varepsilon$

マタ明ラカニ

(5) $\rho(x_0, d) < \varepsilon$

(1)—(5) ニヨリ $\rho(d, f(d)) < 4\varepsilon$

即チ以上デ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シ $\rho(d, f(d)) < \varepsilon$ ナル点 $d \in H_0 \subset H$ ガ存在スルコトガイヘタ. $\varepsilon_n \to 0$ ヲトリ. ソレニ対応スルモノヲ $d_n \in H$ ($n=1, 2, \ldots$) トスレバ H ガ compact ナコトカラ $\{d_n\}$ ノ集積点 $d \in H$ ガ存在シテ明ラカニ $f(d)=d$ 即チ d ハ不動点デアル.

2° 一般ノ場合

Rヲ *linear topological space* トスル. 0ノ近傍系 $\{U_\alpha\}$ ニヨツテRノ *uniform structure* ガ考ヘラレル.. 定理ノ證明ハ *metric* ノ代リニコノ *uniform structure* デ 例ヘバ $\rho(x,y)<\varepsilon$ ノトコロニ $x-y\in U_\alpha$ トイフヤウニヤツテユケバヨイ. H_0ハ有限次元ダカラ、ソノ中デハ *Euclid* 空間トシテ *metric* ガ入リ, 任意ノ U_αニ對シテ $\delta>0$ ガ存在シテ $\rho(x.y)<\delta$, $x.y\in H_0$ ナラバ $x-y\in U_\alpha$ トナルコトニ注意スレバ 1° ノ (1), (2), (4), (5) ガ夫々、

$$(1)' \quad f(d)-f'(d)\in U_\alpha$$

$$(2)' \quad f'(d)-f''(d)\in U_\alpha$$

$$(4)' \quad f''(x_0)-f''(d)\in U_\alpha.$$

$$(5)' \quad x_0-d\in U_\alpha$$

トシテ成立チ 從ツテ $d-f(d)\in U_\alpha+U_\alpha+U_\alpha+U_\alpha$ トナルコトハ繰返スマデモナイ. *topological group* ノ性質カラ 任意ノ U_αニ對シテ $U_\beta+U_\beta+U_\beta+U_\beta\subset U_\alpha$ ナル U_β ガ存在スルカラ 結局上ノコトカラ 任意ノ U_αニ對シテ $d-f(d)\in U_\alpha$ ナル点 $d\in H$ ガ存在スルコトガ分ル.

$x\in H\to x-f(x)$ ナル連續変換デ $\overline{U_\alpha}$ ノ逆像ヲ $H_\alpha=\{x\in H \mid x-f(x)\in\overline{U_\alpha}\}$ トスレバ H_α ハ H ノ *closed set*. 任意ノ $U_{\alpha_1},\ldots U_{\alpha_n}$ ニ對シ $U_\beta\subset U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}$ ナル U_β ガ存在スルコトカラ $\{H_\alpha\}$ ハ *finite intersection property* ヲモツ. 從ツテHガ *compact* ナコトカラ $\bigcap_\alpha H_\alpha$ ニ含マレル点 d ガ存在スル. 即チ任意ノ U_α ニ対シテ $d-f(d)\in\overline{U_\alpha}$. シカルニマタ *group, regularity* カラ任意ノ U_αニ対シテ $\overline{U_\beta}\subset U_\alpha$ ナル U_β ガ存在スルコトニ注意スレバ $d-f(d)$ ハスベテノ U_αニ含マレ. 從ツテ $d-f(d)=0$ $\therefore d=f(d)$ 故ニ dハ不動点デアル. 之デ證明ガ終ル.

(1947. 6. 13)