62. 規数線形束の諸性質 I

中野秀五郎

規数線形束 即ち *Birkhoff* の *Lattice Theory* における *Banach lattice* は *Kantorovitch*: *Lineare halbgeordnete Raume*, *Rec. Math. Moskow* 2 (1937) 121–165 にて初めて考へられ, 正則なる性質を中心として色々な空間が考へられた。著者はかねて規数線形束の分類を志し, 其性質の分析を考へた。今後の研究の便宜上 今迄に得た断片的に発表し, 或は数年来東大セミナリーにおける講義にて得た結果の一部を次にまとめて記すこととする。簡単の為文献は, (B) としては以上の *Birkhoff* の本 又 (K) としては, 以上の *Kantorovitch* の論文 尚又著者の論文には次の記号を使用する。

(1) *Teilweise geordnete Algebra* 数学輯報 17. (1941) 425-511

(2) *Stetige lineare Funktionale auf dem teilweise geordneten Modul.* 東大紀要 4. (1942) 201–382.

(3) *Riesz Fischerer Satz im normierten teilweise geordneten Modul.* 学士院 18. (1942) 350–353.

(4) *Über die Stetigkeit des normierten teilweise* 学士院 19. (1943) 10–11.

(5) *Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul* 学士院 18. (1942) 548–552

(6) Über Erweiterungen von allgemeinen teilweise-geordneten Moduln. I 学士院 18(1941) 626-630
(7) 同 II. 学士院 19(1943) 138-143.

§1. 連續 線形 束空間の性質

此処では $\mathfrak{M}$ は連續なる線形束 即ち 任意の可附番個の正要素列 a_ν に対し $\bigcap a_\nu$ が存在するものとする. 又収斂は皆 order 収斂の意味とする.

1) 汎連續: 正要素系 $a_\lambda \geqq 0$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し $\bigcap_\lambda a_\lambda$ が存在する.

2) 超汎連續: 正要素系 a_λ に対し $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} a_{\lambda_\nu} = \bigcap_\lambda a_\lambda$ が 列 $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \cdots$ が含まれる.

3) 完全: $a_\nu \frown a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$) なる $a_1 a_2, \cdots\cdots$ に対し $\bigcup_\nu a_\nu$ が存在する.

4) 汎完全: $a_\lambda \frown a_\mu = 0$. ($\lambda \neq \mu$) なる a_λ に対し $\bigcup_\lambda a_\lambda$ が存在する.

(以上(1)参照)

5) 係数完備: $a_\nu \geqq 0$ ($\nu = 1, 2, \cdots$) に対し $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が収斂なる正数列 α_ν が存在する.

6) 直交係数完備: $a_\nu \frown a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$) に対し $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が収斂なる正数列 α_ν が存在する.

7) 非有界: $a_\nu \geqq 0$ にして $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が収斂ならば, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が収斂にして $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = +\infty$ なる正数列 α_ν が存在する.

8) 直交非有界: $a_\nu \frown a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$), $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が収斂ならば $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ か収斂 $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = +\infty$ なる正数列 α_ν が存在する. ((7)参照).

9) 一様連續: $a_\nu \downarrow 0$ ならば, $a_\nu \leqq \varepsilon_\nu l$, $\varepsilon_\nu \downarrow 0$, $l \geqq 0$ なる ε_ν, l が存在する. (K)

10) 直交一様連續: $a_\nu \frown a_\mu = 0$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ ならば $a_\nu \leqq \varepsilon_\nu l$, $\varepsilon_\nu \downarrow 0$, $l \geqq 0$.

11) 正則完備: 二重列 $a_{\nu,1} \geqq a_{\nu,2} \geqq \cdots\cdots \to 0$ ($\nu = 1, 2, \cdots$) に対し $l \geqq a_{\nu, \mu_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \cdots$) なる μ_ν 及び l が存在する. ((5) 参照.)

(K)における"正則"とは、正則完備且超汎連続なることである。

以上の性質の間の関係として、明かなることは、2)→1)，4)→3)，3)→6)，3)→8，5)→6)，7)→8)，9)→10)が成立する。

<u>定 理</u>　非有界と一様連続とは同等である。

証 明．$\mathfrak{M}$ が非有界とすれば，$a_\nu \downarrow 0$ に対し $\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu - a_{\nu+1})$ は収斂なるを以て $\ell = \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu(a_\nu - a_{\nu+1})$，$\alpha_\nu \uparrow +\infty$ なる正数列 α_ν が存在し 此 ℓ に対し，$a_\nu \leqq \frac{1}{2^\nu}\ell$ が成立する．逆に $\mathfrak{M}$ が一様連続なるときは $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が収斂にして $a_\nu \geqq 0$ なるときは $b_\nu = a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots$ に対し $b_\nu \downarrow 0$ なるへきを以て，$b_\nu \leqq \varepsilon_\nu \ell$，$\varepsilon_\nu \downarrow 0$ が成立し，$\varepsilon_{\nu_\mu} \leqq \frac{1}{2^\mu}$ なる ν_μ に対し $\sum_\mu b_{\nu_\mu}$ が収斂なるを以て，$\mathfrak{M}$ が非有界なることが知られる．同様にして次の定理が証明される。

<u>定 理</u>　直交非有界と直交一様連続とは同等である。

<u>定 理</u>　正則完備は一様連続且係数完備と同等である。

証 明．$\mathfrak{M}$ が正則完備なるときは，$a_\nu \geqq 0$ に対し $\frac{1}{2^\mu} a_\nu \downarrow_\mu 0$ なるを以て，$\ell \geqq \frac{1}{2^{\mu_\nu}} a_\nu$ なる μ_ν が存在し，従つて $\sum_\nu \frac{1}{2^{\mu_\nu}} a_\nu$ は収斂である。

又 $a_\nu \downarrow 0$ に対し，$\mu a_\nu \downarrow_\nu 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots)$ なるを以て $\ell \geqq \mu a_{\nu_\mu}$ $(\mu = 1, 2, \cdots)$ なる ν_μ が存在し，従つて $\mathfrak{M}$ が一様連続となる．逆に $\mathfrak{M}$ が係数完備且一様連続とすれば，$a_{\nu,\mu} \downarrow_\nu 0$ $(\mu = 1, 2 \cdots)$ に対し，$\varepsilon_\nu \ell_\mu \geqq a_{\nu,\mu}$ $\varepsilon_\nu \downarrow 0$ にして，且 $\sum \alpha_\mu \ell_\mu$ 収斂なるを以て，$\alpha_\mu > \varepsilon_{\nu_\mu}$ に対し $\sum \alpha_\mu \ell_\mu \geqq a_{\nu_\mu,\mu}$ が成立する。

§2 規数線形束空間の性質

線形束 $\mathfrak{M}$ に規数 $\|a\|$ が定義せられ，

1) $\|a\| \geqq 0$，$\|a\|$ が定義せられ，

2) $\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$，

3) $\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$

4) $|a| \leqq |b|$ ならば $\|a\| \leqq \|b\|$

が満足されてゐるとする。特に，

5°) $|a|\leqq|b|$, $\|a\|=\|b\|$ ならば $|a|=|b|$

が満足されるときは、此規数は増加規数であると云ふこととする。次に $\mathfrak{M}$ は連続線形束として次の定義を設ける。

1) 半連続規数： $0\leqq a_\nu\uparrow a$ ならば $\|a_\nu\|\uparrow\|a\|$,

2) 汎半連続規数： $a_\lambda\geqq 0$, $a=\bigcup_\lambda a_\lambda$ ならば $\sup\|a_{\lambda_1}\cup\cdots\cup a_{\lambda_\nu}\|=\|a\|$

3) 連続規数： $a_\nu\downarrow 0$ ならば $\|a_\nu\|\downarrow 0$.

4) 完備規数： a_ν が Cauchy sequence ならば $\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu-a\|=0$ なる a が存在する。

5) 単調完備規数： $0\leqq a_1\leqq a_2\cdots$ にして $\sup\|a_\nu\|<+\infty$ ならば、$a_\nu\leqq a$ なる a が存在する。

6) 汎単調完備規数： $a_\lambda\geqq 0$ にして、$\sup\|a_{\lambda_1}\cup\cdots\cup a_{\lambda_\nu}\|<+\infty$ ならば $a_\lambda\leqq$ なる a が存在する。

先づ明かに 2) → 1) 6) → 5) が成立する。

定理 規数が半連続且単調完備なるときは此規数は完備である。此定理は既に前論文（Reflexive vector lattice の norm に就て）にて書いた。

定理 規数が連続ならば、$\mathfrak{M}$ は超汎連続にして且つ汎半連続規数である。連続規数から $\mathfrak{M}$ の超汎連続の出ることは (4) にて証明されてゐる。又汎半連続規数となることは、同様にして証明されることが (7) に注意されてゐる。即ち $a=\bigcup_\lambda a_\lambda$ にして任意の $a_{\lambda_1}\,a_{\lambda_2}$ に対し $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}\leqq a_{\lambda_3}$ なる a_{λ_3} が存在すると仮定する。

$$\|a_\nu-a_{\nu-1}\|\geqq\sup_{a_\lambda\geqq a_{\nu-1}}\|a_\lambda-a_{\nu-1}\|-\frac{1}{2^\nu}\qquad a_\nu\geqq a_{\nu-1}$$

なるが如く a_λ に属する a_ν を定めるときは、$\bigcup a_\nu=a_0$ に対し任意の a_λ 及び $a_\lambda\cup a_\mu\leqq a_\alpha$, $\mu\geqq\nu$ に対し

$$\|(a_\lambda\cup a_\mu)-a_0\|\leqq\|(a_\lambda\cup a_\nu)-a_\nu\|\leqq\|a_\beta-a_\nu\|\leqq\|a_0-a_\nu\|+\frac{1}{2^{\nu+1}}$$

より $\|(a_\lambda\cup a_0)-a_0\|=0$ が得られる。従つて $a_\lambda\cup a_0=a_0$ 即ち $a_\lambda\leqq a_0$ より $a=a_0$ が得られる。同様にして次の定理が証明される。

定理 連続規数且単調完備規数ならば、汎単調完備規数である。

定理 半連続規数且増加規数ならば、$\mathfrak{M}$ は超汎連続である。

証明: $a_\lambda \geqq 0$, $\bigcup_\lambda a_\lambda = a$ なるときは $a_\nu = a_{\lambda_1\nu} \cup \cdots \cup a_{\lambda_\nu \nu}$ $a_\nu \uparrow a_0$, $\|a_\nu\| \uparrow \|a\|$ なるが如く a_ν が選べる。然るときは $0 \leqq a_0 \leqq a$, $\|a_0\| = \|a\|$ より $a_0 = a$ が証明される。

同様にして次の定理が証明される。

定理　規数が半連続、増加且単調完備ならば、汎単調完備である。

定理　無限次元な完全なる $\mathfrak{M}$ は規数を有さない。

証明: $a_\nu \frown a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$) に対し, $l = \sum_\nu \frac{2}{\|a_\nu\|} a_\nu$ と置くときは $\|l\| \geqq 2^\nu$ となつて矛盾する。

$\mathfrak{M}$ に於ける任意の要素 p への射影子を $[p]$ にて表はすこととする。(11) 参照) 然るときは、半連続、及び連続規数に関し次の定理が成立する。

定理　$a \geqq 0$, $[p_\nu] \uparrow [p]$ に対し $\|[p_\nu]a\| \uparrow \|[p]a\|$ ならば半連続規数である。

定理　$a \geqq 0$, $[p_\nu] \downarrow [0]$ に対し $\|[p_\nu]a\| \downarrow 0$ ならば連続規数である。

証明は 2 参照。

定理　$\lim_{\nu \to \infty} \|a_\nu - a\| = 0$, $a_\nu \geqq 0$ にして, $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots$ 或は $a_1 \geqq a_2 \geqq$ ならば $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a$ である。

より次の定理が得られる。

定理　完備規数ならば $\mathfrak{M}$ は係数完備である。如何となれば, $a_\nu \geqq 0$ に対し $\sum_\nu \frac{1}{2^\nu \|a_\nu\|} a_\nu$ は収斂する。

定理　直交一様連続ならば 連続規数である。如何となれば $a \geqq 0$, $[p_\nu] \downarrow [0]$ に対し $\varepsilon_\nu l \geqq [p_\nu]a$, $\lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = 0$ なるべきを以て $\|[p_\nu]a\| \leqq \varepsilon_\nu \|l\|$ が成立する。

定理　規数が連続且完備なるときは $\mathfrak{M}$ は正則完備である。

証明: $a_{\nu,1} \geqq a_{\nu,2} \geqq \cdots\cdots 0$ なるときは $\sum_\nu \|a_{\nu,\mu_\nu}\|$ が収斂する μ_ν が得られ、従つて $\sum_\nu a_{\nu,\mu_\nu} \geqq a_{\nu,\mu_\nu}$ である。

定義　任意の正数 γ, ε に対し 正数 δ を適当に定めるとき, $\|a\| \leqq \gamma$, $\|b\| \geqq \varepsilon$ ならば、$\|a+b\| \geqq \|a\| + \delta$ なるとき 此規数は一様増加と云ふ。

定理　規数が一様増加且半連続ならば 此規数は連続である。

証明： $a \geqq 0$, $[p_\nu] \downarrow 0$ に対し $\|[p_\nu]a\| \geqq \varepsilon$ であるとすれば 適当な正数 δ に対し $\|a\| \geqq \|([a]-[p_\nu])a\|+\delta$. 故に $\nu \to \infty$ に対し $\|a\| \geqq \|a\|+\delta$ となつて矛盾する。

定理　規数が一様増加且完備なるときは 此規数は連続且汎星調完備である。

証明は(2)を参照されたい。

注意： 完備でない規数を考えることは必要である。例へば. Banach の (M)空間は (L)空間の部分空間と考へることにより (M)空間が超汎連続なることが知られる。

§3 收斂

連続線形束 $\mathfrak{M}$ に於ける收斂は所謂 ordere convergence である. 即ち $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ とは $|a_\nu - a| \leqq l_\nu$, $l_1 \geqq l_2 \geqq \dots$, $\bigcap_\nu l_\nu = 0$ なる l_ν の存在することである。次に他の收斂を定義する。

1) 個別收斂： 任意の $c_1 \leqq c_2$ に対し $\lim_{\nu\to\infty}(a_\nu \frown c_2)\smile c_1 = (a \frown c_2)\smile c_1$ なるとき, a_ν は a に個別收斂数と云ひ, $ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ にて表はす。

これは D-convergence と一致する。即ち $\mathfrak{M}$ を含む完全線形束の中にての odere convergence と一致する。((1)参照)

定理. $ind\cdot\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ なる為の必要且充分なる條件は、任意の射影子 $[p]$ に對し $[p_\mu] \uparrow [p]$, $\lim_{\nu\to\infty}[p_\mu]a_\nu = [p_\mu]a$ なる $[p_\mu]$ の存在することである。

証明は Semi-ordered linear space に於ける個別 ergode 定理として"数学"に発表することとなつてゐる。又此定理より $ind\text{-}\lim_\nu a_\nu = a$ $ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = b$ より $ind\text{-}\lim(a_\nu + b_\nu) = a + b$, $ind\text{-}\lim(a_\nu \smile\!\frown b_\nu) = a \smile\!\frown b$ 等一般に order convergence に関して成立する性質が得られる。

2) 星收斂： a_ν の任意の部分列は $\lim_{\nu\to\infty} a_{\mu_\nu} = a$ なる部分列 a_{μ_ν} を含むとき. a_ν は a に星收斂すると云ひ. $s\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ と記す.((K)参照)

3) 星個別收斂： a_ν の任意の部分列が $ind\cdot\lim_{\nu\to\infty} a_{\mu_\nu} = a$ なる部分なり

a_{μ_ν}を含むことで s-ind-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$にて表はすこととする。

定理　規数が半連続にして、$\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$ ならば、s-ind-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ である。

証明：a_ν の任意の部分列より $\|a_{\mu_\nu}-a\| \leqq \frac{1}{2^\nu}$ なる a_{μ_ν} を選び 任意の $c \geqq 0$に対し $b_\nu = \lim\limits_{\rho\to\infty}(|a_{\mu_\nu}-a| + \cdots |a_{\mu_\rho}-a|)\frown c$ と置くときは、$\|b_\nu\| \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots$ より $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$ が得られる。従つて ind-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_{\mu_\nu} = a$ である。

同様にして次の定理が証明される。

定理　規数が完備にして、$\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$ ならば s-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ である。

定理　規数が半連続にして、s-ind-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ ならば $\varliminf\limits_{\nu\to\infty}\|a_\nu\| \geqq \|a\|$.

証明：$\varliminf\limits_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| < \|a\|$　ind-$\lim |a_\nu| = |a|$ とすれば $b_\nu = |a_\nu|\frown|a_{\nu+1}|\frown\cdots$ に対して $b_\nu \uparrow |a|$ なるべきを以て $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|b_\nu\| = \|a\|$ にして然かも $\|a_\nu\| \geqq \|b_\nu\|$ となり矛盾する。

又次の二定理は殆んど明かである。

定理　規数が連続にして、s-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ ならば $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$.

定理　規数が連続にして s-ind-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ にして、然かも $[p_\mu]\downarrow[0]$ に対し $\|[p_\mu]a_\nu\|$ が $\mu\to\infty$ に対し一様に 0 に収斂すれば $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$

定理　規数が完備且一様単調なるとき s-ind-$\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_\nu\| = \|a\|$ ならば $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_\nu - a\| = 0$ である。

証明：完備より $[a_\nu] \leqq [a_0]$ なる a_0 が存在する。適当な $[p_\mu]\downarrow 0$ 及び部分列 a_{μ_ν} に対し $\lim\limits_{\nu\to\infty}([a_0]-[p_\mu])a_{\mu_\nu} = ([a_0]-[p_\mu])a$ が成立する。故に $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|([a_0]-[p_\mu])(a_\nu - a)\| = 0$ 若しも $\varepsilon>0$に対し 如何なる μ に対しても $\|[p_\mu]a_{\mu_\nu}\| \geqq \varepsilon$ なる μ_ν が存在するときは、適当な $\delta>0$に対し $\|a_{\mu_\nu}\| \geqq \delta + \|([a_0]-[p_\mu])a_{\mu_\nu}\|$ なるべきを以て、$\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_{\mu_\nu}\| \geqq \|([a_0]-[p_\mu])a\| + \delta$ が得られ、従つて $\mu\to\infty$ に対し $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|a_{\mu_\nu}\| \geqq \|a\|+\delta$ となつて矛盾する。故に $\|[p_\mu]a_{\mu_\nu}\|$ は $\mu\to\infty$ に対し、一様に 0 に収斂する。又

$\|(a_{\mu\nu}-a)\| \leqq \|([a_0]-[p_\mu])(a_{\mu\nu}-a)\| \quad \|[p_\mu]a_{\mu\nu}\| + \|[p_\mu]a\|$

より，從つて $\lim_{\nu\to\infty}\|(a_{\mu\nu}-a)\|=0$ が得られる．即ち任意の部分列より $\lim_{\nu\to\infty}\|a_{\mu\nu}-a\|=0$ なる部分列 a_{μ} が選べるを以て，$\lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu-a\|=0$ である．

規数が完備でないときは Cantor $\mathfrak{M}$ まで完備化が可能である．單調完備化に關しては次の定理が成立する．

<u>定 理</u>．規数が半連續にして，$\mathfrak{M}$ の逆富な要素列 a_ν に對し $a_\nu \frown a_\mu = 0$ $(\nu \neq \mu)$ にして a_ν の何れとも直交する要素が 0 なるときは $\mathfrak{M} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$ にして，$\tilde{\mathfrak{M}}$ にては規数が半連續且單調完備にして $\tilde{\mathfrak{M}} \ni \tilde{a} \geqq 0$ に對し $\mathfrak{M} \ni a_\nu \uparrow \tilde{a}$ なる a_ν が存在する．

<u>証明</u>：$\mathfrak{M}$ を含む完全なる連續線形束 $\hat{\mathfrak{M}}$ にして，$\hat{\mathfrak{M}} \ni \hat{a} \geqq 0$ に對し $\mathfrak{M} \ni a_\nu \uparrow \hat{a}$ なる a_ν が存在するが如き $\hat{\mathfrak{M}}$ が存在する．(1) 参照) $\sup \|a_\nu\| < \infty$ に對し $\|\hat{a}\| = \lim_{\nu\to\infty}\|a_\nu\|$ と定義して，$\hat{a}$ の全体を $\tilde{\mathfrak{M}}$ とすれば $\tilde{\mathfrak{M}}$ が以上の條件を満足することが知られる．同様にして次の定理が証明される．

<u>定理</u>　規数が汎半連續にして $\mathfrak{M}$ が汎連續なるときは $\mathfrak{M} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$ にして，$\tilde{\mathfrak{M}}$ にては規数が汎半連續且汎單調完備にして $\tilde{\mathfrak{M}} \ni \tilde{a} \geqq 0$ に對し $\tilde{a} = \bigcup_\lambda a_\lambda$ なる $a_\lambda \in \mathfrak{M}$ が存在する．

(1947. 8. 29)