

63. 規範線形束の諸性質 II

中野秀五郎

§4. 線形汎函数

\mathcal{M} を連続なる線形束空間とする。 \mathcal{M} に於ける線形汎函数 L が有界である
は任意の $a \geq 0$ に對し

$$\sup_{0 \leq x \leq a} |L(x)| < +\infty \quad \text{或は} \quad \sup_{|x| \leq a} L(x) < +\infty$$

なることである。線形汎函数の間に *semi-order* を $L_1(x) \geq L_2(x) \quad (x \geq 0)$
なるとき $L_1 \geq L_2$ であると定義するときは \mathcal{M} に於ける線形汎函数の全体 \mathcal{L}
は \mathcal{S} - \mathcal{R} 連続なる線形束空間を形成し L の正部は

$$L^*(a) = \sup_{0 \leq x \leq a} L(x) \quad (a \geq 0)$$

にて与えられる。(6)参照) 又 $L = (-L)^+$ $\|L\| = L^+ + L^-$ と記すことは通常の通りである。

線形汎関数 L が $\lim_{L \rightarrow \infty} a_\nu = a$ に對し $\lim_{L \rightarrow \infty} L(a_\nu) = L(a)$ なるとき L は連続であるといふ。 L が連続なるときは L は有界である。(12)参照 (2)に於ける証明なり。 $a_\nu \downarrow 0$ に對し $\lim_{L \rightarrow \infty} L(a_\nu) = 0$ より L の連続が証明されることが容易に認められる。) 正線形汎関数系 P_λ が増加集合即ち任意の $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}$ に對し $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2} \leq P_\lambda$ なる P_λ が存在するとき、

$$P(a) = \sup_{\lambda} P_\lambda(a) < +\infty \quad (a \geq 0)$$

なるときは P も本連続にして $P = \bigcup_{\lambda} P_\lambda$ である。(12)参照) 故に連続線形汎関数の全体を \mathcal{F}_s とするとき \mathcal{F}_s は \mathcal{F} の正規部分空間である。即ち $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s + \mathcal{F}_0$ にして \mathcal{F}_s と \mathcal{F}_0 は互に直交する要竟より成る如く \mathcal{F} が直和に分けられる。

定理 \mathcal{M} が直交非有界、即ち直交-極連続ならば $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s$ である。

(証明は(7)を参照)

定理 $\lim_{L \rightarrow \infty} L_\nu = L$ ならば $\lim_{L \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{M}$) である。

(2)参照)

定理 $\mathcal{F} \ni L_\nu, \sup_{\nu} |L_\nu(a)| < +\infty$ ($0 \in \mathcal{M}$) ならば $\sup_{\nu} \left\{ \sup_{0 \leq x \leq a} |L_\nu(x)| \right\} < +\infty$ 即ち L_ν が弱有界ならば $|L_\nu|$ が弱有界である。

証明 $\alpha_\nu = \sup_{0 \leq x \leq a} |L_\nu(x)| \geq 2^{3\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) とするとき $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2} L_\nu(x) = 0$ なるべきを以て適当に式分列を適ひ、 $2\alpha_{\mu\nu} < \alpha_{\mu\nu+1}$ 、

$$0 \leq a_{\mu\nu} \leq a \quad \left| \frac{1}{2^{\mu\nu}} L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2^\mu} a_{\mu 2} + \dots + \frac{1}{2^{\mu\nu-2}} a_{\mu\nu-1} \right) \right| \leq 1,$$

$\left| \frac{1}{2^{\mu\nu}} L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2^{\mu\nu}} a_{\mu\nu} \right) \right| \geq 2^{\mu\nu}$ なる $a_{\mu\nu}$ が得られる。

$$x = \frac{1}{2^{\mu 1}} a_{\mu 2} + \frac{1}{2^{\mu 2}} a_{\mu 3} + \dots \quad 0 \leq x \leq a$$

と導くときは、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^{\mu\nu}} L_{\mu\nu}(x) \right| &\geq \frac{1}{2^{\mu\nu}} \left| L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2^{\mu\nu}} a_{\mu\nu} \right) \right| - 1 - \frac{1}{2^{\mu\nu}} \left| L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2^{\mu\nu}} a_{\mu\nu+1} + \dots \right) \right| \\ &\geq 2^{\mu\nu} - 1 - \frac{1}{2^{\mu\nu}} \left| L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2^{\mu\nu}} a_{\mu\nu+1} + \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\alpha_{\mu\nu+1}} \frac{1}{2^{\mu\nu}} a_{\mu\nu+2} \right) \right| \\ &\geq 2^{\mu\nu} - 1 - 1 \end{aligned}$$

となつて矛盾する。此定理より直ちに次の定理が得られる。

定理 $L_\nu \in \mathcal{F}, \lim_{L \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{M}$) ならば $L \in \mathcal{F}$

定理 $L \in \mathcal{F}$ s, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{D}$) ならば $L \in \mathcal{F}$ として
 及かも $a_\mu \downarrow 0$ 及び任意の正数 ε に対し μ_0 を適当に与へれば

$$\sup_{0 \leq x \leq a_{\mu\nu}} |L_\nu(x)| \leq \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

即ち L_ν が弱収斂すれば $|L_\nu|$ は一様連続である。

証明: 如何なる μ に對しても $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{0 \leq x \leq \mu} |L_{\lambda\nu}(x) - L_{\rho\nu}(x)| \right\} > \varepsilon > 0$, $\lambda_\nu \uparrow +\infty$, $\rho_\nu \uparrow +\infty$ であつたとする。今 $F_\nu = L_{\lambda\nu} - L_{\rho\nu}$ と置く。
 仮定より $\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(x) = 0$ である。 $\forall p, a_{\mu p} \geq a_{\mu p+1}$ 及び $x_p \leq a_{\mu p}$ ($p=1, 2, \dots$) を次の如くに認める。

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq a_{\mu\nu}} |F_{\lambda\nu}(x)| &\leq \frac{1}{4}\varepsilon \quad (\lambda = 1, 2, \dots, p-1) \text{ なる如く } a_{\mu p} \text{ を} \\ |F_{\nu p}((x_1 \wedge a_{\mu_2} - a_{\mu_1}) + \dots + (x_{p-1} \wedge a_{\mu p} - a_{\mu p}))| &\leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ なる如く } \nu_p \text{ を} \\ |F_{\nu p}(x_p)| &\geq \varepsilon, \quad 0 \leq x_p \leq a_{\mu p} \text{ なる如く } x_p \text{ を定めるときは} \\ x &= (x_1 \wedge a_{\mu_2} - a_{\mu_2}) + (x_2 \wedge a_{\mu_3} - a_{\mu_3}) - \dots \leq x_1 \wedge a_{\mu_2} \end{aligned}$$

と置くときは

$$\begin{aligned} |F_{\nu p}(x)| &\geq |F_{\nu p}(x_p \wedge a_{\mu p+1} - a_{\mu p+1})| - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon \\ &\geq |F_{\nu p}(x_p)| - |F_{\nu p}(x_p \wedge a_{\mu p+1})| - \frac{1}{2}\varepsilon \geq \varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon = \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

となつて矛盾する。故に $\varepsilon > 0$ に対し ν_0 a_p を定めると。

$$\sup_{0 \leq x \leq a_p} |L_\nu(x) - L_\mu(x)| \leq \varepsilon \quad (\nu, \mu \geq \nu_0)$$

となり 又 $\sup_{0 \leq x \leq a_{\nu_0}} |L_\nu(x)| \leq \varepsilon$ ($\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$) なる如く $a_{\nu_0} \leq a_p$ を定めると。

$$\sup_{0 \leq x \leq a_{\nu_0}} |L_\nu(x)| \leq 2\varepsilon \quad (\mu \geq \nu_0)$$

となる。さらに L_ν は一様連続である。

一様連続なることより直ちに次の定理が知られる。

定理 $L \in \mathcal{F}$ が L に弱収斂し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(x_\nu) = L(x)$ 。

次の定理も容易に証明される。

定理 $L \in \mathcal{F}$ が一様連続にして $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(x_\nu)$ が収斂し $\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu = x$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(x)$ も又収斂する。

定理 \mathcal{M} が直交一様連続ならば, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ である。

証明は(7)を参照, 此証明と同様にして次の定理が証明される。

定理 \mathcal{M} が直交一様連続にして, L_ν が弱有界ならば, L_ν は一様連続である。

\mathcal{M} が汎連続なる場合, 連続線形汎函数 L に対して $\bigwedge_\lambda a_\lambda = 0$ に対し

$$\inf |aL(a_\lambda, \wedge \dots \wedge a_{\lambda\nu})| = 0$$

なるとき, L は汎連続であるとする。汎連続なる線形汎函数の全体を \mathcal{F}_0 とすれば, \mathcal{F}_0 は \mathcal{F} の正閉部分空間である。即ち $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_0$ なる直和で表はされる。連続の場合と同様にして次の定理が証明される。

定理 $L_\nu \in \mathcal{F}_0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{M}$) ならば, $L \in \mathcal{F}_0$ にして, L_ν は一様汎連続である。即ち任意の正数 ε 及び $\bigwedge_\lambda a_\lambda = 0$ に対し $a = a_\lambda, \wedge \dots \wedge a_{\lambda\nu}$ を適当に定めるときは,

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |L_\nu(ax)| \leq \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

が成立する。

定理 $L_\nu \in \mathcal{F}_0$ が一様汎連続, $\bigvee_\lambda a_\lambda = a$ に対して $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a_\lambda, \vee \dots \vee a_{\lambda\nu})$ が収斂ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a)$ も亦収斂である。凡の場合も同様である。

又次の定理は明かである。

定理 \mathcal{M} が超汎連続ならば, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_0$ である。

$P(|a|) = 0$ ならば $a = 0$ なるが如き連続なる正汎函数 P が存在するとき \mathcal{M} は正則であるとする。

定理 \mathcal{M} が正則ならば, \mathcal{M} は超汎連続である。

証明: $\|a\| = P(|a|)$ と考へるときは 此規範は連続なるを以て, §2 により超汎連続である。

§5. 再線形化

\mathcal{M} を汎連続なる線形束空間とする。 \mathcal{M} に於ける汎連続なる線形汎函数の全体を $\overline{\mathcal{M}}$ として表はすときは, $\overline{\mathcal{M}}$ は又汎連続なる線形束空間である。 $\overline{\mathcal{M}}$ を \mathcal{M} の共軛空間と呼ぶこととする。 $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ に対し $\bar{a}(a) = a(a)$ と考へることにより

$a \in \mathcal{M}$ は又 $\overline{\mathcal{M}}$ の汎連続なる線形汎函数である。

次に \mathcal{M} に関して次の定義を設ける。

1) 半正則: 任意の $a \in \mathcal{M}$, $a \neq 0$ に対し, $\bar{a}(a) \neq 0$ なる $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ が存在する。

2) 正則: 適当なる $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$, $\bar{a} \neq 0$ に対し, $\bar{a}(a) = 0, a \geq 0$ ならば $a = 0$ 。

3) 局所正則: 任意の射影子 $[p]$ に対し, $[p]\mathcal{M}$ が正則。

\mathcal{M} が半正則なるときは $\mathcal{M}(\overline{\mathcal{M}})$ なることが知られる。特に $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ なるとき, \mathcal{M} は再帰であるとする。任意の \mathcal{M} に対し, $\overline{\mathcal{M}}$ は再帰である。

4) 弱完備: $0 \leq a_\lambda \in \mathcal{M}$ ($\lambda \in \Lambda$), $\sup \bar{a}(a_\lambda) < +\infty$

($0 \leq \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) ならば, $a_\lambda \leq a \in \mathcal{M}$ なる a が存在する。

定理 \mathcal{M} が再帰なる爲の必要上充分なる條件は \mathcal{M} が弱完備なることである。(証明は(2)を参照されたい)

§4に於ける正則の場合と同様、次の定理が成立する。

定理 \mathcal{M} が局所正則なるときは \mathcal{M} は超汎連続である。

逆に次の定理の成立することが容易に認められる。

定理 \mathcal{M} が半正則、超汎連続にして $\overline{\mathcal{M}}$ が係数完備なるときは \mathcal{M} は局所正則である。

\mathcal{M} に属する要素系 a_λ ($\lambda \in \Lambda$) 及び $0 \leq \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ なる任意の \bar{a} に対し,

$$\pi(\bar{a}) = \sup_{\lambda} \bar{a}(a_\lambda) = \sup_{\lambda} \left\{ \sup_{\beta \leq \alpha} |\bar{x}(a_\lambda)| \right\}$$

と置き、次の定義を設ける。

5) 弱有界: $\pi(\bar{a}) < +\infty$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$)

6) 一様弱連続: $\bar{a}_\nu \downarrow 0$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \pi(\bar{a}_\nu) = 0$ 。

7) 一様弱汎連続: $\bigcap_p \bar{a}_p = 0$ ならば $\inf \pi(\bar{a}_p, \bar{a}_q, \dots, \bar{a}_p) = 0$

§4にて証明せし如く, $\sup_{\lambda} |\bar{a}(a_\lambda)| < +\infty$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) ならば $\pi(\bar{a}) < +\infty$ である。7) \rightarrow 6) なることは明かである。又 \mathcal{M} が超汎連続なるときは 6) \rightarrow 7) なることも容易に認められる。

次に \mathcal{M} に $\overline{\mathcal{M}}$ による弱位相を導入する。即ち, $\bar{a}_{\lambda_1}, \dots, \bar{a}_{\lambda_r} \in \overline{\mathcal{M}}$ 及び $\alpha_1 < \beta_1, \dots, \alpha_r < \beta_r$, に対し $\{a: \alpha_1 < \bar{a}_{\lambda_1}(a) < \beta_1, \dots, \alpha_r < \bar{a}_{\lambda_r}(a) < \beta_r\}$

を近傍系とする位相を与へるときは、次の定理が成立する。

定理 $\pi(\bar{a}) < +\infty$ ($0 \leq \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) として、 $\bigwedge \bar{a}_\lambda = 0$ に対して、
 $\inf \pi(\bar{a}_\lambda, \dots, \bar{a}_\nu) = 0$ ならば、再帰なる $\overline{\mathcal{M}}$ に対して、

$$\mathcal{O} = \{a : \bar{a}(|a|) \leq \pi(\bar{a})\}$$

は弱位相に関して *bicompaet* である。

証明: $p(\bar{a})$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) が $\bar{a}_\lambda, \dots, \bar{a}_\nu \in \overline{\mathcal{M}}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu > 0$ に対して、
 $|\bar{a}_\lambda(a) - p(\bar{a}_\lambda)| < \varepsilon_1, \dots, |\bar{a}_\nu(a) - p(\bar{a}_\nu)| < \varepsilon_\nu$

なる a が存在するとき、 p が $\overline{\mathcal{M}}$ に於ける線形汎関数として、然かも、

$\sup_{|z| \leq \bar{a}} |p(z)| \leq \pi(\bar{a})$ なることが容易に証明される。

此定理より直ちに次の定理が得られる。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ が再帰ならば、 $a < b$ に対して、

$$\mathcal{O} = \{x : a \leq x \leq b\}$$

なる \mathcal{O} は弱位相に関して *bicompaet* である。

$\overline{\mathcal{M}}$ の要素列 a_1, a_2, \dots の弱収束に同じ次の定義を設ける。

8) 弱収束: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(a_\nu) = \bar{a}(a)$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) なるべき $w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ と記す。

9) 絶対弱収束: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(|a_\nu - a|) = 0$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) なるとき、
 $a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ と記す。

$a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ より $w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ の得られることは明かである。
 又 §4 より次の定理の成立することが知られる。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ が再帰として、任意の $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ に対して $\bar{a}(a_\nu)$ が収束ならば、
 $w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$ が存在する。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ が超汎連続且半正則なるとき、 $a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ ならば、
 $s\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ である。

証明: $\overline{\mathcal{M}}$ が正則なるときは、正則汎関数 \bar{a} に対して $\bar{a}(|a|) = \|a\|$ と考へれば、断片的に定理が成立する。 $\overline{\mathcal{M}}$ が超汎連続且半正則なるときは、適当な射影子列 $[p_\nu] \subseteq [p_2] \subseteq \dots$ に対して、 $[p_\nu]$ $\overline{\mathcal{M}}$ が正則、且 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu] a_\mu = a_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots$) なるが如き $[p_\nu]$ が存在する、故に対角線方法により

$a-w-\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ ならば $ind-\lim_{\mu \rightarrow \infty} [p_\nu] a_{\nu\mu} = a_\nu$ なるが如き部分列 $a_{\nu\mu}$ が得られる。従つて $[p_\nu] ind-\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{\nu\mu} = [p_\nu] ind-\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{\nu\mu}$ より $\nu \rightarrow \infty$ に對し $ind-\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{\nu\mu}$ の存在が知られる。

定理 \mathcal{M} が再帰して完全要素 $a \geq 0$ を有し且正則なるときは、一様連続なる要素列 a_1, a_2, \dots は弱収斂する部分列を有する。

証明: 任意の有理数 α に對し、射影子 $[(a - \alpha a)^+]$ を含む最小射影子環を \mathcal{R}_α とする。即ち $\mathcal{R}_\alpha \ni [p], [q]$ ならば、 $\mathcal{R}_\alpha \ni [p][q], [a] - [p]$ とする。然るときは、 \mathcal{R}_α は明かに可閉個の射影子より成る。次に \mathcal{M} に於ける正則なる正線形汎函数 \bar{a} に對し、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = 0$, $[p_\nu] \in \mathcal{R}_\alpha$ なる射影子 $[p]$ の全体を \mathcal{R} とするとき、 \mathcal{R} は又射影子環にして $[p_\nu] \downarrow [p]$, $[p_\nu] \in \mathcal{R}$ ならば、 $[p] \in \mathcal{R}$ である。 \mathcal{M} の要素 x に對し、任意の α に對し、 $[(x - \alpha a)^+]$ $\in \mathcal{R}$ なる x の全体を \mathcal{M}_α とすれば、スペクトル論により \mathcal{M}_α は連続なる線形果空間にして、 \mathcal{M}_α に於ける射影子の全体が \mathcal{R} と一致することが容易に認められる。今 a_ν の部分列 $a_{\nu\mu}$ に對し、 $\bar{a}([p]a_{\nu\mu})$ ($\mu = 1, 2, \dots$, $[p] \in \mathcal{R}_\alpha$) が収斂なるが如き $a_{\nu\mu}$ を選び出すときは、任意の $[p] \in \mathcal{R}$ に對しても $\bar{a}([p]a_{\nu\mu})$ は収斂する。如何となれば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = 0$, $[p_\nu] \in \mathcal{R}_\alpha$ なる $[p_\nu]$ が存在し $\bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = |\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]|(a)$ なるべきを以て、 $\|\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]\| = |\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]|(a)$ と考へることにより $\overline{\mathcal{M}_\alpha}$ にて $s-ind-\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}[p_\nu] = \bar{a}[p]$ である。然るに $\bar{a}[p_\nu] \leq \bar{a}$ より部分列 $[p_{\nu\mu}]$ を適当に定めれば $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \bar{a}[p_{\nu\mu}] = \bar{a}[p]$ となる。故に $\{a\}$ に對し $\bar{a}([p]a_{\nu\mu})$ の収斂することが知られる。任意の $\bar{x} \in \overline{\mathcal{M}}$ は \mathcal{M}_α に於ける連続線形汎函数と考へられるを以て、スペクトル論により $\bar{x} = \int \lambda d\lambda [p_\lambda] \bar{a}$ となるを以て $\{a\}$ に對し $\bar{x}(a_{\nu\mu})$ の収斂することが知られる。

定理 \mathcal{M} が再帰して、超汎連続なるときは、一様連続なる要素列 a_1, a_2, \dots は弱収斂する部分列を有する。

証明: 射影子列 $[p_1] \leq [p_2] \leq \dots$ を正当に定めると、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu] a_\mu = a_\mu$ に對し、 $[p_\nu] \mathcal{M}$ が正則となる。故に前定理により部分列 $a_{\nu\mu}$ に對し

$[p_\nu]$ 列にて弱収束する。即ち $[p_\nu] a_{\nu\mu}$ が弱収束する如く得られる。然るときは任意の $\bar{a} \in \mathcal{M}$ に對し、 $\bar{a}([p_\nu] a_{\nu\mu})$ が弱収束し、然かも $\overline{\mathcal{M}}$ にて $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}([p_\nu] a_{\nu\mu}) = \bar{a}_0$ と値に $\delta > 0$ より $\bar{a}_0(a_{\nu\mu})$ が弱収束する。此処に明かに $\bar{a}_0(a_{\nu\mu}) = \bar{a}(a_{\nu\mu})$ である。

注意 \mathcal{M} の要素列 a_ν が有界、即ち $|a_\nu| \leq a$ なる a が存在するときは a_ν は明かに一様連続である。又 $\overline{\mathcal{M}}$ が一様連続なるときは、弱有界なる要素列 a_ν は一様連続なることも容易に認められる。

§6. 再帰規数

先づ規数線形集 \mathcal{M} に於ける線形汎函数に就て考へることとする。 \mathcal{M} に於ける線形汎函数 L が規数有界とは

$$|L(a)| \leq \alpha \|a\| \quad (a \in \mathcal{M})$$

なることとする、従つて通常の際に L の規数を

$$\|L\| = \sup_{\|a\|=1} |L(a)|$$

にて定義する。 L が規数有界なるるとき、 L が有界、即ち

$$\sup_{|z| \leq a} |L(z)| < +\infty \quad (0 \leq a \in \mathcal{M})$$

なることは明かである。逆に次の定理が成立する。

定理 \mathcal{M} が完備規数を有すれば、有界なる L は規数有界である。

証明は (B) を参照されたい。又次の定理は明かに成立する。

定理 \mathcal{M} が連続規数を有すれば、規数有界なる L は連続である。逆に次の定理が成立する。

定理 \mathcal{M} の規数が連続でないときは、連続でない規数有界な L が存在する。

証明: \mathcal{M} の規数が連続でないときは、適当な正要素 a 及び射影子列

$[p_\nu] \downarrow [0]$ に對し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|[p_\nu] a\| = \alpha > 0$ である。今

$$P(\alpha_1([p_1] - [p_2])a + \alpha_2([p_2] - [p_3])a + \dots + \alpha_\nu [p_\nu] a) = \alpha_\nu a$$

と定義するときは、 $[p_\nu] a$ ($\nu = 1, 2, \dots$) を含む最小なる線形空間に於て

P は線形汎函数で、然かも、

$$|P(\alpha_1([p_1] - [p_2])a + \dots + \alpha_\nu [p_\nu] a)| = |\alpha_\nu| \leq \|\alpha_1([p_1] - [p_2])a + \dots + \alpha_\nu [p_\nu] a\|$$

が成立する。故に *Emanack* の拡大定理により、 P は \mathcal{M} の全部へ拡大され、 $|P(x)| \leq \|x\|$ が成立する。此 P に対しては $\lim_{\rho \rightarrow \infty} P([p\rho]a) = \alpha > 0$ なるを以て P は連続ではない。

\mathcal{M} が汎連続にして、規数が完備規数なるときは、 \mathcal{M} に於ける汎連続なる線形汎函数は規数有界なるを以て、 \mathcal{M} の共軛空間 $\overline{\mathcal{M}}$ に規数が与えられる。此 $\overline{\mathcal{M}}$ を \mathcal{M} の 共軛規数空間 と呼ぶ。

定理 共軛規数空間は再帰にして其規数は半汎連続且汎連続完備規数である。従つて完備規数である。

証明: $\overline{\mathcal{M}}$ が再帰なることは明かである。又半汎連続且汎連続完備なることは前談話 "Reflexive vector lattice の norm に就て" 定理 i の証明が其儘適用される。

\mathcal{M} の要素系 a_λ ($\lambda \in \Lambda$) に対し $\sup_\lambda \|a_\lambda\| < +\infty$ なるとき、 a_λ に 規数有界 であるとする。 \mathcal{M} が共軛規数空間 $\overline{\mathcal{M}}$ を有するとき次の定理の成立することは容易に認められる。

定理 a_λ が規数有界なること、弱有界なることは同等である。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ の規数が連続規数なるときは、 \mathcal{M} の規数有界なる要素系 a_λ は一様汎連続である。

$\overline{\mathcal{M}}$ の規数が連続規数なる際の充分条件としては次の定理がある。

定理 \mathcal{M} の規数が 一様個 即ち任意の正数 $\varepsilon, \varepsilon'$ に対し 正数 δ を適当に定めるときは $a \wedge b = 0, \|a\| \geq \varepsilon, \|b\| \leq \delta$ に対し $\|a+b\| \leq \|2\| + \varepsilon' \|b\|$ が成立するならば、 $\overline{\mathcal{M}}$ の規数は一様増加である。従つて当然連続規数である。

証明は (2) を参照されたい。以上の定理により §5 に於ける弱収束に関する定理が規数線形系に應用される。

\mathcal{M} が再帰にして、其共軛規数空間 $\overline{\mathcal{M}}$ に対し

$$\|a\| = \sup_{\| \bar{a} \| \leq 1} |\bar{a}(a)| \quad (a \in \mathcal{M})$$

なるとき、 \mathcal{M} の規数を 再帰規数 と云ふ。再帰規数にしては既に前談話にて記したから略すこととする。 §4 より直ちに次の定理が得られる。

定理 \mathcal{M} が再帰規数空間なるときは、 \mathcal{M} の要素列 a_ν が任意の $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ に対し、 $\bar{a}(a_\nu)$ が収数ならば、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(a_\nu) = \bar{a}(a)$ なる $a \in \mathcal{M}$ が存在する。

定理 再帰規数空間 \mathcal{M} が超汎連続ならば、一般汎連続なる要素列 a_ν に対し、弱収数する部分列が得られる。

定理 再帰規数空間 \mathcal{M} が超汎連続にして、 $\overline{\mathcal{M}}$ が連続規数なるときは、規数有界なる要素列 a_ν は弱収数する部分列を有する。

任意の規数線形束 \mathcal{M} は再帰規数空間に拡大できるのである。先づ \mathcal{M} を完備規数なる様に拡大出来ることは、Cantorの方法で明かくなる。故に \mathcal{M} は完備規数を有するとする。Banachの定理により任意の要素 $a \neq 0$ に対し、 $\angle(a) \rightarrow 0$ なる規数有界なる線形汎函数が存在する。故に \mathcal{M} に於ける規数有界なる線形汎函数の全体を $\widehat{\mathcal{M}}$ とすれば $\widehat{\mathcal{M}}$ は再帰空間である。(6)参照)
 $\widehat{\mathcal{M}}$ の共軛規数空間 $\overline{\widehat{\mathcal{M}}}$ が \mathcal{M} の拡大にして、再帰規数空間である。然かも $\overline{\widehat{\mathcal{M}}}$ の共軛規数空間は $\overline{\mathcal{M}}$ である。此 $\overline{\mathcal{M}}$ を \mathcal{M} の汎函数拡大と呼ぶこととする。
 \mathcal{M} が再帰規数空間にあつても、 \mathcal{M} の汎函数拡大は必ずしも \mathcal{M} と一致しないのである。其れが一致するのは \mathcal{M} の規数が連続規数の場合に限ることは以上の場より明かである。(8)参照)

次に規数線形束が再帰規数空間なる爲の條件として次の定理が成立する。

定理 規数線形束 \mathcal{M} が再帰規数空間なる爲の必要且充分なる條件は、

1) \mathcal{M} が汎連続、2) 汎連続規数、3) 汎量個完備規数 4) 任意の $a \neq 0$ 及び正数 ε に対し、 $|\angle(a)| \geq \|a\| - \varepsilon$, $\|\angle\| \leq \gamma$ なる汎連続線形汎函数 \angle が存在することである。

此定理は前談話の最後の定理より直ちに得られる。

定理 規数線形束 \mathcal{M} が、前定理の條件 1), 2), 3) 及び、任意の要素 $a \neq 0$ に対し、 $[0] \neq [p] \subseteq [a]$ にして $[p]$ \mathcal{M} が連続規数なるが如き射影子 $[p]$ が存在するときは、 \mathcal{M} は再帰規数空間である。

証明: 前定理の 4) が満足されることを証明すればよい。任意の $a \neq 0$ に対し、仮定に依り、 $[p_\lambda] \subseteq [a]$ して $[p_\lambda]$ \mathcal{M} が連続規数なるが如き $[p_\lambda]$ の全体に対しては明かに $\cup [p_\lambda] | a| = |a|$ である。然かも $[p_{\lambda_1}], [p_{\lambda_2}]$

\mathbb{R} に対しては $[p_{\lambda_1}] \vee [p_{\lambda_2}] = [p_{\lambda}]$ なる入亦存在する。故に仮定の 2) により $\sup \| [p_{\lambda}] a \| = \| a \|$ なるを以て、任意の正数 ε に對し $\| \Sigma p_{\lambda} a \| \geq \| a \| - \varepsilon$ なる $[p_{\lambda}]$ が存在する。 $[p_{\lambda}] \mathcal{M}$ は連続線形関数なるに より、 $[p_{\lambda}] \mathcal{M}$ にては規数有界なる \mathcal{L} は汎連続である。Banach の定理に より $|\mathcal{L}([p_{\lambda}] a)| = \| [p_{\lambda}] a \|$, $\| \mathcal{L} \| \leq 1$ なる \mathcal{L} が存在する。此 \mathcal{L} に對しては $|\mathcal{L}(a)| = |\mathcal{L}([p_{\lambda}] a)| \geq \| a \| - \varepsilon$ なるを以て 4) が満足される。此定理の特別の場合として次の定理が成立する。

定理 規数線形束 \mathcal{M} が連続に於て、連続規数上重調完備規数なるときは、 \mathcal{M} は再帰規数空間である。然かも \mathcal{M} は汎函数拡大と一致する。(B参照)
 此定理に記せる \mathcal{M} を K -空間と名づけて小笠原君が談話 240号で多くの結果を得て居る。先づ K -空間 \mathcal{M} の共軛空間 $\overline{\mathcal{M}}$ が又 K -空間なるときは \mathcal{M} は Banach の意味で正則である。此れは $\overline{\mathcal{M}}$ が \mathcal{M} に於ける規数有界なる線形汎函数の全体より成ることより明かである。然かも此定理の逆が成立するのである。即ち規数線形束 \mathcal{M} が Banach の意味に於て正則なるときは \mathcal{M} 及び $\overline{\mathcal{M}}$ は K -空間である。如何となれば、此場合は \mathcal{M} は先づ汎函数拡大と一致すべきを以て、 \mathcal{M} は K -空間、同様にして $\overline{\mathcal{M}}$ も K -空間である。

次に K -空間 \mathcal{M} は弱完備であると云つて、 \mathcal{M} に於ける要素列 a_ν が (0) -有界 即ち $|a_\nu| \leq a$ なる a が存在して、任意の $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ に對し $\bar{a}(a_\nu)$ が收斂なるとき a_ν が弱收斂なることを証明してある。此場合 (0) -有界なる仮定の不要なることは §5 より明かである。

又 K -空間に於ては (0) -有界なる要素列は弱收斂する部分列を有することを証明してあるが、 (0) -有界なる仮定は一樣弱汎連続なる仮定に拡張されることも §5 より明かである。

最後に、 K -空間 \mathcal{M} は $\overline{\mathcal{M}}$ に於ける連続線形汎函数の全体と一致することを述べてあるが、此れは、正しくないのである。 \mathcal{M} は再帰、即ち $\overline{\mathcal{M}}$ の汎連続線形汎函数の全体と一致はするが、必ずしも連続線形汎函数の全体とは一致しない。

例に其例を与へる。 $a(t)$ を $-\infty < t < +\infty$ に於ける可附番個の点を除いて 0 なる函数にして、 $\| a \| = \sum_{\tau} |a(\tau)|$ が有限なるが如き函数の全体を

\mathfrak{M} とすれば, \mathfrak{M} は K -空間である. $\overline{\mathfrak{M}}$ は連続の有界函数より成る.

今実数全体を整列して t_ξ とする. $\overline{a}_\eta(t_\xi)$ を $\xi \in \eta$ に対し $\overline{a}_\eta(t_\xi) = 1$ として, $\xi < \eta$ に対し $\overline{a}_\eta(t_\xi) = 0$ とすれば, 明らか $\overline{a}_\eta \in \overline{\mathfrak{M}}$ である. 射影子 $[\overline{a}_\eta]$ に對應する $\overline{\mathfrak{M}}$ の *Eigenraum* ((2) 参照) に於ける逆像を $\cup [\overline{a}_\eta]$ として $\prod_{\eta} \cup [\overline{a}_\eta] \rightarrow \mathfrak{P}_0$ なる点 \mathfrak{P}_0 を考へる. 即ち $[\overline{a}_\eta]$ の總てを含む *Maximal ideal* の一つを \mathfrak{P}_0 とする. 然るときは $\overline{\mathfrak{M}}$ に含まれる常数 1 に対し,

relative spection $(\frac{\overline{a}}{1}, \mathfrak{P}_0)$ は, $\overline{\mathfrak{M}}$ の連続線形汎函数ではあるが 連続性ではない. ((5) 参照) 故に $(\frac{\overline{a}}{1}, \mathfrak{P}_0)$ は \mathfrak{M} に含まれない. 如何となれど \mathfrak{M} に含まれる α は悉く $\overline{\mathfrak{M}}$ の連続線形汎函数である.

(1947. 8. 29)