

64. Reflexive vector lattice

の norm に就て II

中野 秀五郎

前談話に於ける最後の定理は拡張し得ることを注意したが、次に其大体を記すこととする。此定理は一般に Space \mathcal{M} の汎連続線形汎函数の集合 $\overline{\mathcal{M}}_0$ が \mathcal{M} の conjugate space $\overline{\mathcal{M}}$ と一致する条件を求めることとなる。此処に $\overline{\mathcal{M}}$ とは、 \mathcal{M} の任意の要素 $a \neq 0$ に對し、 $\bar{a}(a) \neq 0$ なる汎連続線形汎函数 \bar{a} が存在して、然かも $\overline{\mathcal{M}}$ は、汎連続線形汎函数の全体なることを意味するものとする。又 $\overline{\mathcal{M}}_0$ は、汎函数の大小の意味にて Space をなしてゐると云ふ仮定の下にて、次の定理が成立する。

定理 $\overline{\mathcal{M}}_0$ が $\overline{\mathcal{M}}$ と一致する爲の必要且充分なる條件は、

$$1) \overline{\mathcal{M}}_0 \rightarrow \bar{a}_\lambda \ (\lambda \in \Lambda), \ \bigwedge_{\lambda} \bar{a}_\lambda = 0 \text{ に對し } \inf_{\lambda \in \Lambda} \bar{a}_\lambda \wedge \dots \wedge \bar{a}_{\lambda_\nu}(a) = 0 \text{ (} \mathcal{M} \ni a \geq 0 \text{)}.$$

$$2) \overline{\mathcal{M}}_0 \ni \bar{a}_\lambda \geq 0 \ (\lambda \in \Lambda) \text{ に對し } \sup_{\lambda \in \Lambda} \bar{a}_\lambda \vee \dots \vee \bar{a}_{\lambda_\nu}(a) < +\infty \text{ ならば、} \\ \bar{a}_\lambda \leq \bar{a}_0 \in \overline{\mathcal{M}}_0 \text{ なる } \bar{a}_0 \text{ が存在し、}$$

$$3) \overline{\mathcal{M}} \ni a \neq 0 \text{ に對し } \bar{a}(a) \neq 0 \text{ にして、} |a| \wedge |b| = 0 \text{ ならば } \bar{a}(b) = 0 \text{ なる } \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}_0 \text{ が存在することである。}$$

此定理は前掲論文(中野秀五郎・東大紀要)にて明記してはないが、実質的には証明されてある。即ち *kononische Darstellung* を考へれば明かであり、又直接にも証明される。次は \mathcal{M} に *norm* が與へられた時の以上の定理の変形に就て述べることにする。

1° 先づ \mathcal{M} に *norm* が与へられ、 \mathcal{M} が *norm* に関して *complete* なる場合を考へる。此場合には、

$$[*] \quad \|\bar{a}\| = \sup | \bar{a}(a) | < +\infty$$

として $\overline{\mathcal{M}_0}$ に *norm* が定義されることは、既に前掲論文に出ている。然る時は定理の條件2)は次の條件と同本である。

2') $\overline{\mathcal{M}_0} \rightarrow \bar{a}_\lambda \geq 0, \sup \|\bar{a}_\lambda, \dots \vee \bar{a}_\lambda\| < +\infty$ ならば、 $\bar{a}_\lambda \leq \bar{a}_0$ と $\overline{\mathcal{M}_0}$ なる \bar{a}_0 が存在する。

如何となれば2)より2')が出ることは明かである。故に2')より2)の出ることを証明する。 $\bar{a}_\lambda, \dots, \bar{a}_\lambda$ が \bar{a}_λ の一つに含まれる場合を考へれば充分である。若しも $\sup \bar{a}_\lambda(a) < +\infty$ ($a \geq 0$) として、 $\sup \|\bar{a}_\lambda\| < +\infty$ なるときは、 $\bar{a}_\lambda \leq \bar{a}_\lambda \leq \dots \bar{a}_\lambda(a_\nu) > 2^\nu$ なるが如き、 $\bar{a}_\lambda, \bar{a}_\lambda, \dots$ 及び $a_\nu \geq 0, \|a_\nu\| = 1$ ($\nu = 1, 2, \dots$) が得られる。然るときは $\sum \frac{1}{2^\nu} a_\nu \| < +\infty$ より $x_0 \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} a_\nu$ なる x_0 が存在する。此 x_0 に対しては $\bar{a}_\lambda(x_0) \geq \frac{1}{2^\nu} \bar{a}_\lambda(a_\nu) > 2^\nu$ となり、仮定に反する。此の1°の場合の應用として *L-space* の *conjugate* が *M-space* なることが知られる。勿論 *L-space* と *M-space* とが同一空間ならば任意である。

2° 更には $\overline{\mathcal{M}_0}$ が *norm* に関して連続であるとする。即ち $\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2 \geq \dots, \wedge \bar{a}_\nu = 0$ に対し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\bar{a}_\nu\| = 0$ である場合を考へる。此場合には條件1)は必然的に満足されてある。如何となれば $\wedge \bar{a}_\lambda = 0$ に対し、 $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \bar{a}_\lambda = 0$ なる部分列が得られる。(中野秀五郎: *Über die Stetigkeit des normierten teilweise geordneten Moduls*, 学士誌 19 (1943) 参照) 又 2') は、

2'') $0 \leq \bar{a}_1 \leq \bar{a}_2 \leq \dots, \sup \|\bar{a}_\nu\| < \infty$ ならば $\bar{a}_\nu \leq \bar{a}_0$ と $\overline{\mathcal{M}_0}$ なる \bar{a}_0 の存在にて置換られる。此れも以上の論文に於けると同様証明される。

ことが既に注意されてある。即ち $\alpha = \sup_{\lambda} \|a_{\lambda}\| < +\infty$ に対し

$\|\bar{a}_{\lambda_{\nu+1}} - \bar{a}_{\lambda_{\nu}}\| \geq \sup_{\bar{a}_{\lambda} \neq \bar{a}_{\lambda_{\nu}}} \|\bar{a}_{\lambda} - \bar{a}_{\lambda_{\nu}}\| - \frac{1}{2^{\nu}}$. $\bar{a}_{\lambda_1} \leq \bar{a}_{\lambda_2} \leq \dots$
なるが如き部分列 $\bar{a}_{\lambda_{\nu}}$ を考へるときは $\bar{a}_{\lambda_{\nu}} \leq \bar{a}_0 \in \overline{\text{co}} \bar{a}_0$ なる \bar{a}_0 が存在し

$\|(\bar{a}_{\lambda_{\nu}} - \bar{a}_{\lambda_{\nu}}) - \bar{a}_{\lambda_{\nu}}\| \leq \sup_{\bar{a}_{\lambda} \geq \bar{a}_{\lambda_0}} \|\bar{a}_{\lambda} - \bar{a}_{\lambda_{\nu}}\| \leq \|\bar{a}_{\lambda_{\nu+1}} - \bar{a}_{\lambda_{\nu}}\| + \frac{1}{2^{\nu}}$
より.

$\|\bar{a}_{\lambda_{\nu}} - (\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}_{\lambda_{\nu}}) - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}_{\lambda_{\nu}}\| = 0$ 即ち $\bar{a}_{\lambda} \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}_{\lambda_{\nu}} \leq \bar{a}_0$
が得られる。此 2° の場合の應用として L_p -space の conjugate が L_q -
space なることが、Hölder の不等式により直ちに証明される。

(1947. 8. 29)