65. 群の自由積分解に関して

阪大　高橋 睦男

Mathematical Review をみて居ましたら、次の論文が既に出て居る事を知りました。

F. Levi; *On the number of generators of a free product, and a lemma of A. Kurosch* (Journ. Indian Math. Soc. (N.S), 5 (1941))

Kurosch の lemma となる分 *Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte* (Recueil Math. 44 (1937)) に出て居る、次の補助定理だと思はれます。

$\boxed{\textit{lemma}}$
$$\left.\begin{array}{l} G = A * B \\ 1 \neq g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in A \end{array}\right\} \rightarrow g_1, g_2 \in A$$

之の証明は前に、部分群定理を使って簡単に証明出来る事を知りましたので、多分 Levi のと同様だらうとは思ひますが、簡単に一応報告することにします。

Ⅰ. 部分群定理　$G = A*B$. $G \supset U \rightarrow U = F * \prod^{*}_{x}(U\cap A^{x}) * \prod^{*}_{y}(U\cap B^{y})$

Ⅱ. Gruschko の lemma　$G = A*B \rightarrow \mu(G) = \mu(A) + \mu(B)$

ここに $\mu(H)$ は群 H を生成する元の最小個数

Ⅰ. は周知 (*R. Baer, F. Levi. Compositio Math.* (1936)
M. Takahasi 学士院記事 (1944))

Ⅱ はもう少し精密な形で *Gruschks* が証明して居ります. (*Rec Math. N.S* 8(50) 1940)

Ⅱの方に関しては 上記の *Levi* の論文や 同じく *Math Reirew* に出ていました。

B.H. Neumann: On the number of generators of a free product (*Journ. London Math. Soc.* 18 (1943)) 等で 尚論じられてゐる事だらうと思はれます.

Ⅰ. Ⅱ を使って *Kurosch* の *lemma* は次の様に証明出来ます.

$\{g_1, g_2\} = K$ とすると $K\cap A \ni g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \neq 1$ だから

$K\cap A \neq 1$

故に Ⅰ から　$K = (K\cap A) * L$.

Ⅱ から

$$2 \geqq \mu(K) = \mu(K\cap A) + \mu(L)$$

$K\cap A \neq 1$　だから

$$\mu(K\cap A) \neq 0$$

$\mu(K\cap A) = 1$　即ち　$K\cap A = (a)$, cyclic とすると

$$1 \neq g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in K_2 \cap (K\cap A) = K_2\cap A = (K\cap A)_2 = (a)_2 = 1$$

(2・2　H_2 は群 H の交換子群)　之は矛盾ですから

$\mu(K \cap A) = 2 \quad \mu(L) = 0$ 即ち $L = 1$ $\therefore K = K \cap A$ 即 $K \leq A$

従つて勿論 $q_1, q_2 \in A$.

Kurosch の元の証明に比べれば、非常に簡單にすむ訳です。

(1947. 9. 8)