69 Riemann空間の上で定義された或る種のベクトル空間に就て (I)

朝長康郎

§1. 計量が g_{ij} で与へられた Riemann 空間 R_n の各点で $n+1$ 次元のベクトル空間を考へる。此のベクトル空間に属するベクトル $V^{\lambda(i)}$ は R_n のベクトル V^i と R_n のスカラー V^0 から成立つものとする。幾何学的には V^i と V^0 は夫々切觸空間内の一つの超球の中心と半径を表すものと考へられる。V^λ の計量を次の式で定義する。

(1.1) : $g_{\lambda\mu} V^\lambda V^\mu = g_{ij} V^i V^j - V^0 V^0$

但し

(1.2) : $g_{\lambda\mu} = \begin{cases} g_{ij}, & \lambda = i \quad \mu = j \\ 0 & \lambda = i \quad \mu = 0 \\ -1 & \lambda = 0 \quad \mu = 0 \end{cases}$

隣接するベクトル空間同志は互に擬似的に接続してゐるものとする。即ち V^λ に対する共変微分を次の式で定義する。

(1.3) $$V^\lambda_{;i} = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^i} + \Gamma^\lambda_{\mu k} V^\mu$$

之が(1.1)の計量を保存するとすれば、

(1.4) $$g_{\lambda\mu;i} = 0$$

即ち

(1.5) $$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^i} = g_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\lambda i} + g_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu i}$$

成分に分ければ、

(1.6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{mj}\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\Gamma^m_{jk} \\ 0 = \Gamma^0_{ik} - g_{im}\Gamma^m_{0k} \\ 0 = \Gamma^0_{0k} \\ \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \end{cases}$$

(1.7)

なることを要請すれば

(1.8) $$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right)$$

となる

の接続の曲率テンソルは

(1.9) $$V^\lambda_{;i;j} - V^\lambda_{;j;i} = V^\sigma B^\lambda{}_{\sigma ij}$$ より、

(1.10) $$B^\lambda{}_{\sigma jk} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\sigma j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\sigma k}}{\partial x^j} + \Gamma^\lambda_{\pi k}\Gamma^\pi_{\sigma j} - \Gamma^\lambda_{\pi j}\Gamma^\pi_{\sigma k}$$

成分に分ければ

(1.11) $$\begin{aligned} B^{m}_{\cdot ijk} &= \overset{(2)}{R}{}^m_{ijk} + \Gamma^m_{0k}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^m_{0j}\Gamma^0_{ik} \\ B^0_{\cdot ijk} &= \Gamma^0_{ij;k} - \Gamma^0_{ik;j} \\ B^i_{\cdot 0jk} &= g^{im} B^0{}_{mjk} \\ B^0_{\cdot 0ja} &= 0 \end{aligned}$$

となる：以上の如く定義されたベクトル空間を L_n と呼ぶことにする。

§2. 二つの特別た場合

Case. 1. $\Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{ji} = 0$

此の場合は(1.3)から次の事が判る。即ち R_n のベクトル V^i が R_n の意味で自

(1) ギリシア文字は0から n 迄、ラテン添字は1から n 迄成立するものとする。

(2) $$R^m_{ijk} = \frac{\partial \left\{ {m \atop ij} \right\}}{\partial x^k} - \frac{\partial \left\{ {m \atop ik} \right\}}{\partial x^j} + \left\{ {m \atop sk} \right\}\left\{ {s \atop ij} \right\} - \left\{ {m \atop sj} \right\}\left\{ {s \atop ik} \right\}$$

身の方向に平行に動けば V^λ も L_n の意味で平行に動く。但し

$$V^\lambda=\begin{cases}V^i & \lambda=i\\ 0 & \lambda=0\end{cases}$$

L_n の測地線に相当するものは $\dfrac{dx^i}{dt}$, V^0 が曲線に沿つて平行であるとして(1 3)から

$$(2.1)\ \begin{cases}(a)\ \dfrac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{dx^k}{dt}+\Gamma^i_{0k}V^0\dfrac{dx^k}{dt}=0\\ (b)\ \dfrac{dV^0}{dt}+\Gamma^0_{ij}\dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dx^j}{dt}=0\end{cases}$$

となる。

(2-1 b)は

$$\frac{dV^0}{dt}=0 \quad \text{即ち} \quad V^0=\text{常数}$$

$V^0=\dfrac{e}{m}$ と置いて之を(2-1 a)に代入すれば

$$(2.2)\ \frac{d^2x^i}{dt^2}+\left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+\frac{e}{m}\Gamma^i_{0k}\frac{dx^k}{dt}=0$$

之は統一場理論で有名な式である。

Case. 2 $\Gamma^0_{ij}=\rho g_{ij}$ (ρ は或るスカラー)

此の場合は測地線の方程式は (2-1)より

$$(2.3)\ \begin{cases}\dfrac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{dx^k}{dt}+\rho V^0\dfrac{dx^i}{dt}=0\\ \dfrac{dV^0}{dt}+\rho\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2=0.\end{cases}$$

となる。但し s は曲線の弧長とする。更に計算すれば次の様になる。

$$(a)\ \frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

$$(b)\ \frac{dx^i}{dt}=\frac{dx^i}{ds}\left(Ae^{\int\rho ds}+Be^{-\int\rho ds}\right)$$

$$(c)\ V^0=-\left(Ae^{\int\rho ds}-Be^{-\int\rho ds}\right)$$

$$(d)\ g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}-V^0V^0=4AB$$

但し A.B は任意常数

之から見ると L_n の測地線は R_n の測地線の各点に成分が夫々(2 4 b, c)の $\dfrac{dx^i}{dt}$, V^0 であるベクトルが附随したものである事が分る。

(1947. 8. 31)