70. 二次元閉集合体上ノ測地線ノ延長（II）

（阪大）　矢島　　猛

前號誌（第5号：6月10日）デハ E(4) ハ一次元連結集合デアルコトヲ証明シ

マシタ。本号デハ更ニ $E(a)$ ハ(1)局所連結ナルコト (2) arcwise ニ連結ナルコトヲ証明シマス。

6. 基本豫備定理

先ヅ前談話デ屢々用ヒタ $H(A.B)$ ノ論法ヲ整理シテ基本予備定理トシテ掲ゲマス。前談話ノ (4.C) 以外ハ若干ノ修正ヲ施シテ此ノ基本予備定理ガ使ヘマスガ. (4.C) ハ考ヘハ同ジデスガ此ノ基本予備定理トハ若干異ナリマス.

基本予備定理 一点 a ト三ツノ集合 $A.B.C$ ガアッテ

(i) C ハ連結集合

(ii) $x\in C$ ナラバ $\overline{ax}\cdot(A+B)\neq 0$

(iii) $x\in C$ デ $\overline{ax}\cdot\bar{A}\neq 0$ ナラバ $\overline{ax}\cdot B=0$, $\overline{ax}\cdot\bar{B}\neq 0$ ナラバ $\overline{ax}\cdot A=0$

(iv) $\overline{ax_1}\cdot A\neq 0$, $\overline{ax_2}\cdot B\neq 0$ トナルヤウナ $\overline{ax_1}$, $\overline{ax_2}$ ($x_1, x_2\in C$) ガ存在スルナルトキ $x_0\in C$ ガ存在シテ a, x_0 ハ少クモ二ツノ異ナル g.s. デ結バレル. 即チ slit ニナル.

(注) C ヲ二組ニ分ケル. $x\in C$ ナルトキ $\overline{ax}\cdot A\neq 0$ トナル $\overline{ax}$ ガアレバ, $x\in C_A$, $\overline{ax}\cdot B\neq 0$ ナラ $x\in C_B$ トスル. (iv) カラ $C_A\neq 0$, $C_B\neq 0$ 且 (ii) カラ $C=C_A+C_B$. (i) カラ $C_A\overline{C_B}+\overline{C_A}C_B\neq 0$ 何レデモ同ジダカラ $C_A\overline{C_B}\neq 0$ トスル. $x_0\in C_A$, $x_i\in C_B$, $x_i\to x_0$ トナル x_0 ト $\{x_i\}$ ガアル. $x_i\in C_B$ ダカラ $\overline{ax_i}\cdot B\neq 0$ トナル $\overline{ax_i}$ ガアル. $x_i\to x_0$ ナルトキ $\overline{ax_i}$ ハ a ト x_0 ヲ結ブ g.s. ノ一ツ $\overline{ax_0}$ ニ收斂スル. $\overline{ax_0'}\cdot\bar{B}\neq 0$ デアル. (iii) ニヨリ $\overline{ax_0'}\cdot A=0$ デアル. シカルニ $x_0\in C_A$ ダカラ $\overline{ax_0''}\cdot A\neq 0$ トナル $\overline{ax_0''}$ ガ存在スル. $\overline{ax_0'}$ ト $\overline{ax_0''}$ ハ明ラカニ異ナルカラ a ト x_0 ヲ結ブ少クモ二ツノ g.s. 即チ slit ガ得ラレタ. (以上)

基本予備定理ノ応用トシテ次ノコトガ言ヘマス.

(6.A) 任意ノ $\overline{ab}$ ニ対シ $c\in\overline{ab}$, $cb<\delta/2$ ナル点 c ヲトレバ $\overline{cb}$ ハ延長出来ル. ($\overrightarrow{cb}$ ガ延長出来ルトハ $\overline{cb}$ ガ b ノ方向ニ延長出来ルコト)

(證) $\overline{ab}$ 上ニ $cb<\delta/2$ ナル点 c ヲトルトキ $\overrightarrow{cb}$ ガ延長出来ナイトスル.

b ヲ中心トシ cb ヲ半径トスル円ヲ K_b トシ, c ヲ中心トシテ $\rho>0$ ($\rho<\mathrm{Min}(ca, cb)$) ヲ半径トスル円ヲ K_c トスル. K_c ハ $\overline{ab}$ ニヨリ

ニツノ弧ニ分ケラレル。其ノ両端ヲ含マナイ部分ヲ A.B トスル。又 K_b トAノ交点ノ中 K_b 上デ C カラ最遠ノ点ヲ p. K_b トBノ交点ノ中 C カラ最遠ノ点ヲ q トスル。K_b ハ $p.q$ ニヨリニツノ弧ニ分タレル。K_c ノ内部ト共通点ヲ持タナイ方ヲ $p.q$ モ含メテ C トスル。点 C ヲ基本予備定理ノ a ト考ヘルト $x_0 \in C$ ガ存在シテ c, x_0 ハ異ナルニツノ g.ふ デ結バレル。コレハ $cx_0 \leqq cb + bx_0 < \hat{a}$ ニ矛盾スル。

7. $\boxed{\text{定理2. } E(a) \text{ ハ局所連結デアル}}$

証) $p \in E(a)$ ニ於テ $E(a)$ ハ局所連結デナイトスル。$\overline{ap}$ 上ニ $qp < \frac{a}{2}$ ナル点 q ヲトレバ (6 A) ニヨリ $\overrightarrow{qp}$ 延長出来ル。其ノ延長上ニ p ニ十分近ク r ヲトル。別ニ q ニ於テ $\overline{ap}$ ノ両側ニ (前設話3. 参照) $s.t$ ヲトレバ $\overline{st}$ ハ $\overline{ap}$ ト一点デ交ハル。ソレヲ改メテ q トスル。Δrst ノ直径ヲ十分小サクトレバ内部ガアル。ソレヲ U_p トスル。

$p_i \to p$ トナル $E(a)$ ノ点列 $\{p_i\}$ ガアッテ U_p ニ於ケル p, p_i ヲ含ム $E(a)$ ノ成分 C_p, C_{p_i} ガ $C_p \cdot \overline{C_{p_i}} + \overline{C_p} \cdot C_{p_i} = 0$ トナッタトスル。$\overline{ap_i}$ ハ $i \to \infty$ ナルトキ $\overline{ap}$ ノ一ツニ収斂スルカラ初メカラ $\overline{ap_i} \to \overline{ap}$ ト仮定シテヨイ。故ニ $\overline{st}$ ト $\overline{ap_i}$ ノ交点ヲ q_i トスレバ $q_i \to q$. 簡単ノタメ $q_i \in \overline{qr}$ トスル。任意ノ i ニ対シ $x_i \in \overline{qq_i}$ ヲ適当ニトレバ $\overrightarrow{ax_i}$ ノ延長ガ $\overline{sr}$ 又ハ $\overline{tr}$ ニ交ハルヤウニ出来ル。何故ナラ若シソウデナケレバスヘテノ $x \in \overline{qq_i}$ ニ対シ $\overline{ax}$ ノ極遠点ハ U_p 内ニアル。其ノ集合ハ予備定理2ト同一ノ方法ニヨリ U_p ノ内部ニ於ケル $E(a)$ ノ連結集合ニ含マレ従ッテ $C_p \overline{C_{p_i}} + \overline{C_p} \cdot C_{p_i} = 0$ ニ反ス。故ニ $x_i \in \overline{qq_i}$ ガアッテ $\overrightarrow{ax_i}$ ノ延長ハ $\overline{sr}$ 又ハ $\overline{rt}$ ニ交ハル交点ヲ y_i トスル。$\overline{x_i y_i}$ ハ U_p ヲニツノ部分ニ分ケ其ノ各々ノ部分ニ p. p_i ガ含マレル。$i \to \infty$ トスルトキ $p_i \to p$ ダカラ $\overline{ay_i}$ ノ間ノ点デ p ニ収斂スルモノガアル。コレハ $p \in E(a)$ ニ反ス。

8. $\boxed{\text{予備定理3} \quad p \in E(a) \text{ ナルトキ } \varepsilon > 0 \text{ ヲ十分小ニトレバ } E(a) \cdot S(p, \varepsilon) \text{ ノ } p \text{ ヲ含ム成分ハ arcwise ニ連結デアル。}}$

(証) $\varepsilon < \frac{a}{4}$ トシテ $S(p, 2\varepsilon)$. $S(p, \varepsilon)$ ノ境界ヲ夫々 K_1, K_2 トスル。$E(a)$. $S(p, \varepsilon)$ ノ p ヲ含ム成分ヲ C_p トスル. $q \in C_p$ ナルトキ $p.q$ ガ $E(a)$

ノaトcデ結バレルコトヲ証明スル。$\overline{ap}$トK_1, K_2ハ夫々唯一点デ交ハルb, cトスル。$\overline{aq}$ハK_1, K_2ト一般ニハ一点デ交ハラナイガ其ノ交点ノ集合ハ閉集合ダカラK_2上ヲcカラ一定ノ方向ニ進ムトキ最初ノ点ト最後ノ点ガアル。夫々r, sトスル。K_2ノ弧$\widehat{cr}$, $\widehat{cs}$ヲ夫々A, Bトシ其ノ両端ヲ除イタモノヲA', B'トスル。又$\overline{rs}=C$トスレバ$C\subset S(p\ 2\varepsilon)$デ$C$ハ$\overline{ap}$ト交ハラナイカラ、$A+B+C=K_2'$トスレバ、$K_2'$ハ円ト位相合同デ$S(p\ 2\ \varepsilon)$ニ含マレ$p$ヲ内部ニ含ム。$q$ハ$K_2'$ノ内部ニ含マレル。何者若シ外部ニアレバ$C\,C_p\neq 0$トナリ$C$ガ$\overline{aq}$ノ間ノ点ノ集合ナルコトニ反ス。$r\in\overline{qs}$又ハ$s\in\overline{qr}$デアルガ$r\in\overline{qs}$トスル。$\overline{rq}$ハ全ク$K_2'$ノ内部ニアル。$\overline{aq}$ト$K_1$ノ交点ノ中$s$ニ最モ近イ点ヲ$t$トスル。

K_2'ノ内部ニアッテ$\overline{rq}$ト交ラズ且pヲ内部ニ含ム多角形Pヲトル（多角形トハ有限個ノ点ヲ順ニ線分デ結ンダ円ト位相合同ナ図形）Pト$\overline{ap}$ノ交点ヲPノ順序ニ従ッテ$d_1, d_2 \cdots\cdots d_n$トスル。$d_i$ト$d_{i+1}$ヲ結ブ$P$ノ部分ヲ$P_i$トスレバ$P_i+\overline{d_id_{i+1}}$ガ$p$ヲ内部ニ含ムヤウナ$i$ガアル。$i=1$トスル。$P_1$ハ、$d_1$, d_2ノ他$\overline{ap}$ト共通点ヲ持タナイ。P_1カラd_1, d_2ヲ除イタ部分ヲP_1'トスレバ$x\in P_1'$ニ対シ$\overline{ax}$ハ$A'+B'$ニ必ズ交ハル。又$\overline{ax}\cdot A'\neq 0$ナラバ$\overline{ax}\cdot B'=0$デアル。何者若シソウデナケレバ$\overline{ax}$ハ$A'$, B'ト共通点ヲ持ツy_1, y_2トスル。$\overline{y_1y_2}\subset S(p,\ 2\varepsilon)$デアル。$\widehat{cy_1}+\overline{y_1y_2}+\widehat{cy_2}=K_2''$トスレバ$p$ハ$K_2''$ノ内部ニ含マレ$q$ハ外部ニアル。従ッテ$C(p, q)$ガ連結ナルコトニ反ス。故ニ$\overline{ax}\cdot A'\neq 0$ナラ$\overline{ax}\cdot B'=0$。同様ニ$\overline{ax}\cdot B'\neq 0$ナラ$\overline{ax}\cdot A'=0$。次ニ$x$ヲ$d_1$, d_2ノ十分近クニトレバ、$\overline{ax_1}\cdot A'\neq 0$, $\overline{ax_2}\cdot B'\neq 0$トナル$x_1$, x_2ノ存在スルコト明ラカデアル。

基本予備定理ニ於ケルA, B, CトシテA', B', P_1'ヲトレバ$x_0\in P$ガアッテa, x_0ハ夫々A'、B'ニ交ハル二ツノ線分デ結バレル。故ニ$x_0\in E(a)$。Pヲ任意ニトルトキx_0ノ集合ニp, qヲ加ヘタモノヲ$C(p, q)$トスル。$x_i\in C(p, q)$, $x_i\to x$ナラバa, xハ夫々A, B'ト交ハル二ツノ線分デ結バレルカ又ハxハp, qト一致スル。故ニ$C(p, q)$ハ閉集合デアル。

次ニ$C(p, q)$ガ連結集合ニナルコトヲ言フ。連結デナイトシテpヲ含ム成

分ヲ$C_1(p.q)$. 残リヲ $C_2(p.q)$ トシ $C_1(p.q)$ ト $C_2(p.q)$ ノ距離ヲ ρ_1 トスル. $\rho_1>0$. $C_1(p.q)$ ト $K_2'+\overline{rq}$ トハ閉集合デ共通点ヲ持タナイカラ距離 $\rho_2>0$ ガアル. K_2' 及ビ其ノ内部ヲ三角形分割シテ各々ノ三角形ノ直径ガ $\frac{\rho}{3}$ ($\rho<\min(\rho_1, \rho_2)$) ヨリ小ニナルヤウニスル. $C_1(p.q)$ ノ点ヲ内部又ハ辺上ニ持ツ三角形ノ和集合ノ境界ハ一般ニ数個ノ多角形カラナリ. 且 $C_1(p.q)$, $C_2(p.q)$, $K_2'+\overline{rq}$ ノ点ヲ含マナイ. 其ノ中ニ p ヲ内部ニ含ムモノガ存在スル. コレヲ P トスレバ P ハ K_2' ノ内部ニアリ $\overline{rq}$ ニ交ラズ p ヲ内部ニ含ム. 故ニ P ノ上ニ $C(p.q)$ 点ガアル 矛盾 故ニ $C(p.q)$ ハ連結集合デアル.

$x\in C(p.q)$ トスレバ ax ヲ結ビ、夫々 A', B' ト交ハルニツノ $q\ s$ ガアル. $\overline{ax}^1$, $\overline{ax}^2$ トスル. $\overline{ax}^1+\overline{ax}^2$ ハ K_2' ヲニツノ部分ニ分ケ各々ノ部分ニ $p.q$ ヲ含ムカラ x ハ $C(p.q)$ ノ cut point デアル. 故ニ $C(p.q)$ ハ $p.q$ ヲ結ブ arc デアル.

定理 3. $E(a)$ ハ arcwise ニ連結デアル.

(証) 定理2ト 予備定理3トカラ容易ニ証明出来ル.

後記 コレデ一応報告ヲ終リマス. $E(a)$ ガ arcwise ニ連結ナコトガ言ヘマシタカラ、コレカラ $E(a)$ ノ order ニ関スルコトハ容易ニ出マスガ面白クナイカラ省略シマス. 此ノ他 $E(a)$ ノ 1-dim ベッチ数ト Ω ノ 1-dim ベッチ数ガ等シイ コトモ成立シソウデスガ未ダ証明出来マセン. (実ハコレガ本談話ノ主目的ナノデスガ). 尚此ノ研究ニハ寺阪教授ノ一方ナラヌ御指導ヲ得マシタコトヲ衷心ヨリ感謝致シマス. (1947. 11. 2)