

73. 複素-B-空間ニ於ケル Γ 級数ニツイテ

(阪大) 霜田 伊左衛

若者談話2) “Complex-Banach-spaceニ於ケル Γ 級数ニツイテ”ニ於テ導
イタ正半径ノ簡單ノ条件ヲ示ス。ノ為ニ必要ナZornノ定理ヲ掲載スル。

定理 複素-B-空間ニ於ケル領域 D ニ於テ定義セラレ、複素-B-空間ノ極
ヨトル函数 $f(x)$ ガ i) D ノ各点チGateauxノ微分ガアリ、ii) D 内デ第一類集
合ヲ除イテ連続ナルトキ、 $f(x)$ ハ D デ正則トナル。

$U_n(x)$ ハ複素 - B - 空間ヲ定義セラレ複素 - B - 空間ノ値ヲトル n 次ノ冪次多項式トスル。

[定理 1] \square 級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ ニ於テ

$$\sup_{\|x\|=1} \overline{\lim} \sqrt[n]{\|U_n(x)\|} = \mu \text{ トオケバ}$$

正則半径ハ 0 ヲハ μ トナル。

[証明] $\mu = \infty$ ナル場合ノ証明ハ同様デアリカラ此處デハ $\mu < \infty$ ノ場合ノ証明ヲスル。正則半径ガ 0 ナル爲ノ必要且十分ナル條件ハ距離ニ有界半径 $\lambda = 0$ デアル。故ニ正則半径ガ 0 デナケレバ $\lambda > 0$ トナル。此所ニ入ハ $\frac{1}{\lambda} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=r} \|U_n(x)\|}$ デ与ヘラレシム。

即チ $\mu \geq \lambda$ ナル故 $\mu > 0$ トナル。又 $\|x\| < \mu$ ニ於テ $\sum \|U_n(x)\|$ ガ収斂シ $\|x\| > \mu$ ニ於テハ $\sum U_n(x)$ ガ収斂シナイヤウナ x ガ存在スル事ハ明カデアリ。故ニ任意ノ正数 ε ヲトルト $\|x\| < \mu + \varepsilon$ デハ $f(x)$ ハ正則トナル事ハナイ。若シ $\|x\| < \mu$ デ $f(x)$ ガ正則ナル事ガ余レバ即チ μ ガ正則半径デアリ。此ノ爲ニ *Jordan* ノ定理ノ仮定 i), ii) ヲ証明スル。

i) $\|x\| < \mu$ ナル任意ノ点 x ヲトル。又 y ヲ空間ノ任意ノ点トスル。

$\rho (> 0)$ ヲ十分小サクトリ $0 < \|x + \rho e^{i\theta} y\| < \mu$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) ナラシムレバ $r (> 1)$ ヲ適当ニトルト $0 < \|r(x + \rho e^{i\theta} y)\| < \mu$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) トナル。

$$\begin{aligned} \therefore \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|U_n(r(x + \rho e^{i\theta} y))\|} \\ \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\|z\|=1} \|U_n(z)\|} \leq \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

故ニ任意ノ $\varepsilon (> 0)$ ニ對シ n_0 ガ定マリ $n \geq n_0$ ナルトキ

$$\|U_n(r(x + \rho e^{i\theta} y))\| \leq \left(\frac{\mu}{\lambda - \varepsilon}\right)^n \text{----- (1)}$$

又 $\|r(x + \rho e^{i\theta} y)\| < \mu$ ナル故 $\sum \|U_n(r(x + \rho e^{i\theta} y))\|$ ハ収斂スルカラ

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\|U_n(r(x + \rho e^{i\theta} y))\|} \leq 1 \text{----- (2)}$$

$$\frac{d}{n} \log \|U_n(r(x + \rho e^{i\theta} y))\| = g_n(\alpha)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n^+(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta = V_n(\alpha)$$

トオケバ $V_n(\alpha)$ ハ $|\alpha| < \rho$ デ調和デ $V_n(\alpha) \geq 0$, $V_n(\rho e^{i\theta}) = g_n^+(\rho e^{i\theta})$

トナリ $g_n(\alpha)$ ハ $|\alpha| = \rho$ 上デ最大値ヲトル函数デアル³⁾

$$\therefore V_n(\alpha) \leq g_n(\alpha) \leq \frac{\rho + \sigma}{\rho - \sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n^+(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

一方 (1) ヨリ $g_n^+(\rho e^{i\theta}) \leq \frac{\mu}{\lambda - \varepsilon}$ ($n \geq n_0$)

$$(2) \text{ ヨリ } \lim g_n^+(\rho e^{i\theta}) = 0$$

$$\text{故ニ } \overline{\lim} V_n(\alpha) \leq \frac{\rho + \sigma}{\rho - \sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\lim} g_n^+(\rho e^{i\theta}) d\theta = 0$$

故ニ $|\alpha| \leq \rho' < \rho$ ナルトキ

$(\varepsilon' < \rho'$ ナルヤ) ナ正数 ε' ニ対シ n_0 ガ定マル $n \geq n_0$ ナルトキ

$$V_n(\alpha) \leq \varepsilon', \text{ 乃チ } \|U_n(z + dy)\| \leq \left(\frac{\varepsilon'}{\rho'}\right)^n$$

然ルトキハ $U_n(z + dy) = \sum_{i=0}^n U_{ni}(z, y) \alpha^i$ ナル故

$$\|U_{ni}(z, y)\| \leq \frac{1}{\rho^i} \left(\frac{\varepsilon'}{\rho'}\right)^n \quad (n \geq n_0)$$

$$\therefore \sum \|U_{ni}(z, y)\| |\alpha|^i \leq \left(\sum \left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^i\right) \left(\frac{\varepsilon'}{\rho'}\right)^n < \left(1 + \frac{|\alpha|}{\rho}\right)^n \left(\frac{\varepsilon'}{\rho'}\right)^n$$

故ニ $|\alpha| \leq \rho' < \left(\frac{\rho}{\varepsilon'} - 1\right)\rho$ 乃チ $\left(1 + \frac{|\alpha|}{\rho}\right) \left(\frac{\varepsilon'}{\rho'}\right) < 1$ ナルヤウニスルバ

$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|U_{ni}(z, y)\| |\alpha|^i\right)$ ハ $|\alpha| \leq \rho'$ デ一様ニ收斂スル。

$$\text{故ニ } \sum \left(\sum U_{ni}(z, y) \alpha^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z, y) \alpha^n$$

ト書ク事ガ出来、 $|\alpha| \leq \rho'$ デ絶対收斂スルカラ μ ニツキ正則トナルカラ

$\sum U_n(z + dy)$ ハ λ デ Gateaux ノ核ニナル。

ii) $\|x\| \leq \mu' < \mu$ (μ' ハ任意ニトル) デ $\sum \|U_n(x)\|$ ハ收斂スル。今

$$S_i = E \left[x \mid \sum_{n=0}^i \|U_n(x)\| \leq i, \|x\| \leq \mu' \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

トスルバ $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_i \subset \dots$, 且 $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = E[\|x\| \leq \mu']$.

S_i ハ閉集合デアル。乃チモシ $x_n \in S_i, x_n \rightarrow x_0$ 且 $x_0 \notin S_i$ トスルバ、

$\sum \|U_n(x_0)\| > i$, 故ニ ε ヲ十分小ナルトスルバ $\sum \|U_n(x_0)\| \geq i +$

3ε ($\varepsilon > 0$) トナル。又 $\|x_0\| \leq \mu'$ ナル故 $\sum \|U_n(x_0)\| < \infty$.

故ニ $\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n(x_0)\| < \varepsilon$ ナル様ナ N ガアル。 $\therefore \sum_{n=0}^N \|U_n(x_0)\| > i + 2\varepsilon$

$U_n(x)$ ノ連続性ニヨリ $\|x - x_0\| \leq \delta$ ナルトキ

$$\|U_n(x) - U_n(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{N+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

又 $n_0 \leq N$ ナルトキ $\|x_n - x_0\| < \delta$ トナル故、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n(x_n)\| \geq \sum_{n=0}^N \|U_n(x_n)\| \geq \sum_{n=0}^N (\|U_n(x_0)\| - \|U_n(x_n) - U_n(x_0)\|)$$

$$> i + \varepsilon$$

之ハ不合理ナル。故ニ S_i ハ閉集合トナル。

次ニ $\|x\| < \mu'$ 内ニ任意ノ点 x_0 ヲトル。 x_0 ノ近傍 $U(x_0)$ ノ点ガすべて S_1 ノ集合点ナラバ $U(x_0) \subset S_1$ 。モシ之ガイヘナケレバ $U(x_0)$ ヲ x_1 ガアリ $\overline{U(x_1)} \cap S_1 = \emptyset$ トナル。且 $\overline{U(x_0)} \supset \overline{U(x_1)}$ 。 $U(x_1)$ ノ点ガすべて S_2 ノ集合点ナレバ $U(x_1) \subset S_2$ 。然ラザルトキハ $\overline{U(x_1)} \supset \overline{U(x_2)}$, $\overline{U(x_2)} \cap S_2 = \emptyset$ ----- 以下之ヲ繰リカヘスト $U(x_0)$ ノ中ニ S_i ニ属スル $U(x_{i-1})$ ガアルカ又ハ S_i ニゾクサナイ $\overline{U(x_i)}$ ノ外ガアルカ何レカデア。モシ後者ナレバ $\overline{U(x_0)} \supset \overline{U(x_1)} \supset \dots \supset \overline{U(x_n)} \supset \dots$ ナル故ニ $\prod \overline{U(x_i)}$ ヲ x' ヲトルバ $\sum \|U_n(x')\| = \infty$ トナリ 不合理。故ニ $U(x_0)$ ノ中ニ S_i ニゾクスル閉集合 $U(x_{i-1})$ ガアル。

$x \in U(x_{i-1})$ ナルトキハ $\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n(x)\| \leq \varepsilon$ 。故ニ $S_m(x) = \sum_{n=0}^m U_n(x)$ トオケバ。 $S_m(x)$ ハ $U(x_{i-1})$ デ正則デ一様有界 且 $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = f(x)$ ナル故ニ $f(x)$ ハ $U(x_{i-1})$ デ正則デア。 ⁴⁾ 勿論 $U(x_{i-1})$ デ連続デア。 $\|x\| < \mu'$ デ連続点ノ集合ハ稠密トナリ μ' ハ $\mu' < \mu$ デ任意デアルカテ ⁱⁱ⁾ ハ満足サレル。又ツテ *Zorn* ノ定理ニヨリ $f(x)$ ハ $\|x\| < \mu$ デ正則デア。乃チ μ ハ正則半径トナル。(以上)

$\|x\| = 1$ ニ於ケル Compact set G' ノ集合ヲ取トスル。

[定理 2] \forall 級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ ニ於テ

$$\sup_{G \in \mathbb{R}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|U_n(x)\|} = \frac{1}{\tau}$$

トオケバ、正則半径ハ τ トナル。 ⁵⁾

[証明] $0 < \|x\| < \tau$ ニ含マレル任意ノ compact set ヲ G トスル。

$x \in G'$ ナル時 $\frac{x}{\|x\|} = y$ トオケバ y ノ集合ハ $\|x\| = 1$ ニ於ケル compact set G' トナル。

$$\therefore \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt[n]{\sup_{y \in G'} \|U_n(y)\|} \leq \frac{1}{\tau} \text{ ----- (1)}$$

G' ハ compact set ナル故、 $\sup_{x \in G'} \|x\| = \|x'\|$ ($x' \in G'$)。

$0 < \varepsilon < \tau - \|x\|$ ナル任意ノ ε ヲトルト $\tau - \varepsilon = \tau_0$ ガ定マリ $\tau_0 > 1$ トナル

トキ (1) ヲリ
$$\sup_{y \in G'} \|U_n(y)\| \leq \frac{1}{(\tau - \varepsilon)^n}$$

$$\therefore \|U_n(x)\| \leq \left(\frac{\|x\|}{1-\varepsilon}\right)^n \quad (x \in G', n \geq n_0)$$

故に $\sum U_n(x)$ は G' で一様収斂スル。 G' は $0 < \|x\| < \tau = \text{含まれる任意の Compact set}$ ナル故に $\sum U_n(x)$ は $0 < \|x\| < \tau$ で正則トナル。 又 τ 空間ノ任意ノ点 y トスル。 正数 ρ ヲ適当ニトレバ $\|\rho y\| < \tau$ トナル。 故に $\sum U_n(\rho y)$ は収斂スル。 故に $\|U_n(\rho y)\| \leq M$ ($n = (1, 2, \dots)$) トナル。 複素数 α ヲ $|\alpha| \leq \rho - \varepsilon$ (ε は十分小ナル正数) トスレバ

$$\|\sum U_n(\alpha y)\| = \|\sum U_n(y) \alpha^n\| \leq \sum \|U_n(\rho y)\| \left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^n$$

ナル故に $\sum U_n(\alpha y)$ は $|\alpha| \leq \rho - \varepsilon$ で一様収斂スルカラ α ニツキ正則トナル。

$\sum U_n(x)$ は $x=0$ に於て Gateaux ノ微分ヲ有ス。 故に Zorn ノ定理ニヨリ $\sum U_n(x)$ は $\|x\| < \tau$ で正則ナル。 $\|x\| < \tau + \varepsilon$ 子ハ必ず正則点ガ現レル事ハ第一号著者談話ヲ論ジタノト殆ト同ジダカラ此所テハ省略スル。

乃チ τ ハ正則半径ナル: (以上)

複素数-変数ノ冪級数ニ於テハ一点 Z_0 子収斂スレバ $|Z| < |Z_0|$ 子収斂スルガ吾々ノ場合ハ之ハ成立シナイ。 既ニ複素 2次元空間子 $\sum_{n=0}^{\infty} x y^n$ ハ $x_0 = (i, \rho)$ 子収斂スルガ $x_1 = (1, \sqrt{3})$ 子ハ収斂シナイ。

[註] 定理 1 に於テハ $\mu = 0$ ナルトキ $\lambda > 0$ ナラバ μ ガ正則半径トナルノデ正則半径ヲ決定スルニハ μ 入ヲ同時ニ檢バナケレバナラナイ。 入ヲ檢ベスニ μ ダケデ正則半径ヲ決定スルニハ $\mu > 0$ ナルトキ常ニ $\lambda > 0$ ナル事ガ分レバヨイ。 之ヲ証明スルタメニ簡單ナ Zorn ノ定理ヲノベル。

定理 $p(x)$ ハ $\mu > 0$ 常ニ Gateaux ノ微分ガアル。 ii) $|z| = 1$ ナルトキ $\|p(z)\| = \|p(\bar{z})\|$, iii) x_0 ニ於テ $\|x - x_0\| \leq \sigma$ ($\sigma > 0$) ナルトキ $\|p(x)\| \leq M$ ガ成立スルトキハ、 $\|x\| \leq \sigma$ ナルトキ $\|p(x)\| \leq M$ トナル。

今 $\mu > 0$ トスレバ定理 1 ノ証明 ii) ヨリ $\|x\| < \mu$ 内ニ一点 x_0 ガ存在シ適当ニ σ (> 0) ヲトレバ $\|x - x_0\| \leq \sigma$ ナルトキ $\|U_n(x)\| \leq M$ トナル。

$U_n(x)$ ハ i), ii) ノ条件ヲ満足スル事明ラカナル故に $\|x\| \leq \sigma$ ナルトキ $\|U_n(x)\| \leq M$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1} \|U_n(x)\|} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=\sigma} \|U_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)\|} \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{M}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda \geq \sigma > 0$$

乃チ $\mu > 0$ ナレバ常ニ $\lambda > 0$ トナル, 故ニ μ ダケデ正則半径ハ決定出来ル.

(以上)

1) M. Zorn: *Annals of math.* 46

2) 全国紙上数学談話会第一号著者, *Complex-Banach-spaces* ニ於ケル
フ 級数ニツイテヲ参照.

3) 同上 第三号著者, *Complex-Banach-spaces* ニ於ケル 解析函数
ニツイテ(II) 23頁参照.

4) 同上 第二号著者, *Complex-Banach-spaces* ニ於ケル 解析函数ニツイテ(I)
定理 1. 参照.

5) 2) ニ於ケル正則半径ト比較シテ 幾分簡單ニナル.

2) ニ於テハ G ハ $\|x\| \leq 1$ 内ノ *compact set* トシタガ 此所デハ $\|x\| = 1$ 仕
ダケデ考ヘテヨイ.

又 $\tau = 0, \infty$ ノ時モ同様ニ証明セラレル.

(1947. 五 14)