75. 非線型微分方程式論におけるリミットサイクルの実際的決定法に就て (II)

清水辰次郎
卜部小十郎

次に二三の微分方程式に就て機械による解を求めたが．そのうちリミットサイクル

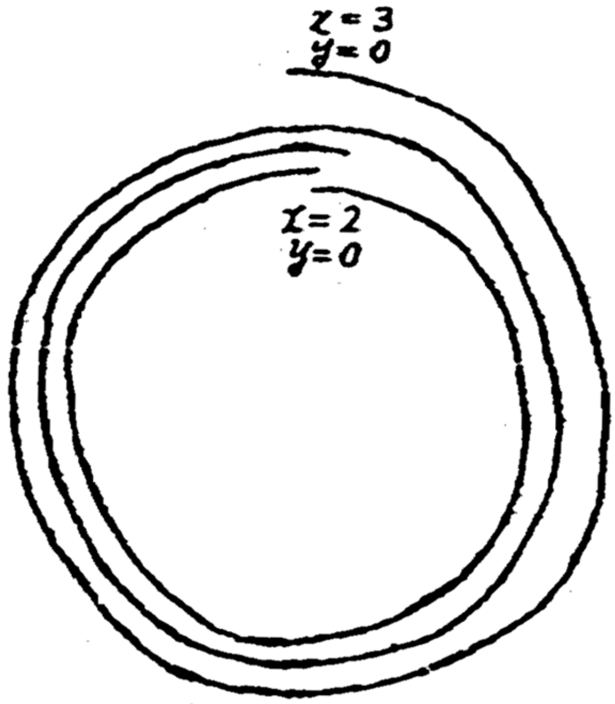
の存在する方程式にて現在知られてある條件に適合せぬ方程式を見出すことができた。

$$\text{(IV)}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu(1-x^2)(1-\mu x)y}{y}$$

$$\text{(V)}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu\left\{(1-x^2)y+y^2\right\}}{y}$$

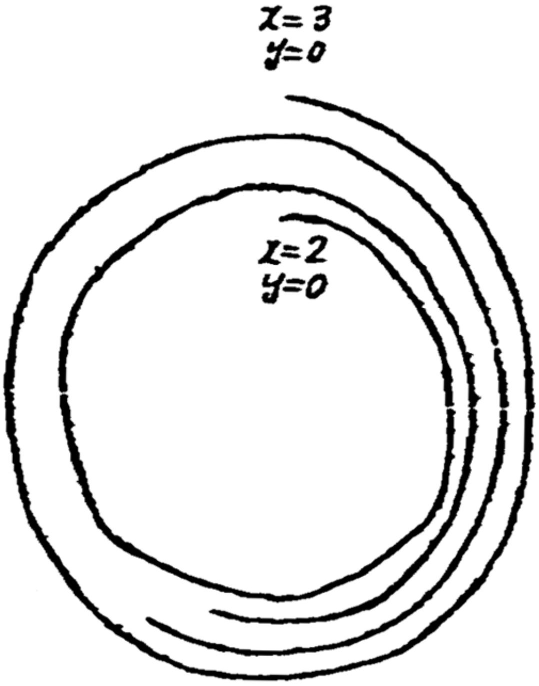
がそれである。

その解は次図の如くである。



$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu(1-x^2)(1-\mu x)y}{y}$$

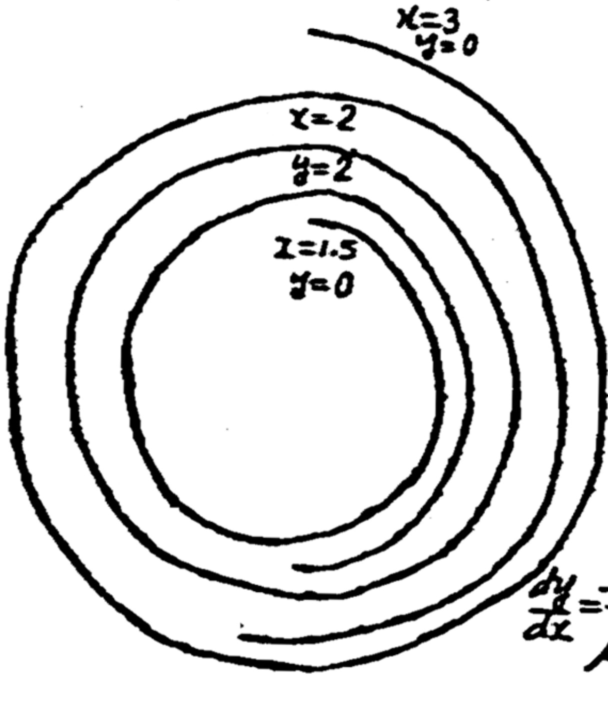
$$\mu=0.1$$



$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu\left\{(1-x^2)y+y^2\right\}}{y}$$

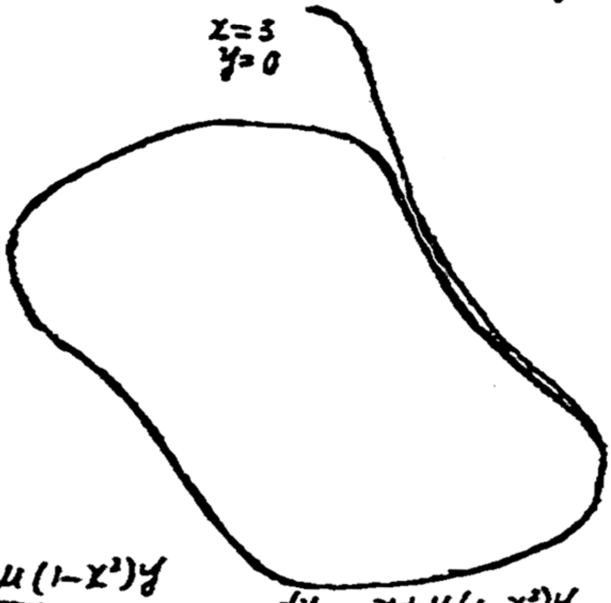
$$\mu=0.1$$

尚本誌第二卷6号の本論文(I)の微分方程式(I),(II)(III)の解は印刷するとき勝手な書方をしたので実物と異るものとなつてしまつた 依つて次に訂正しておく。



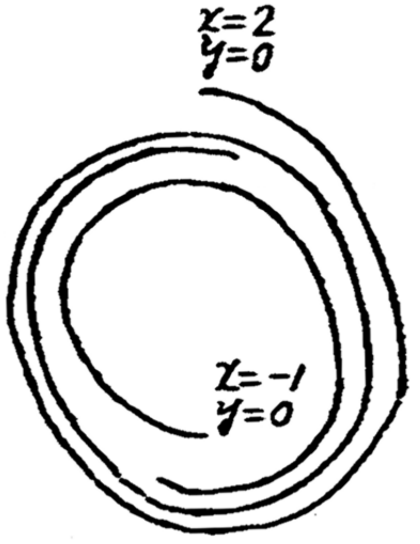
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}$$

$$\mu=0.1$$



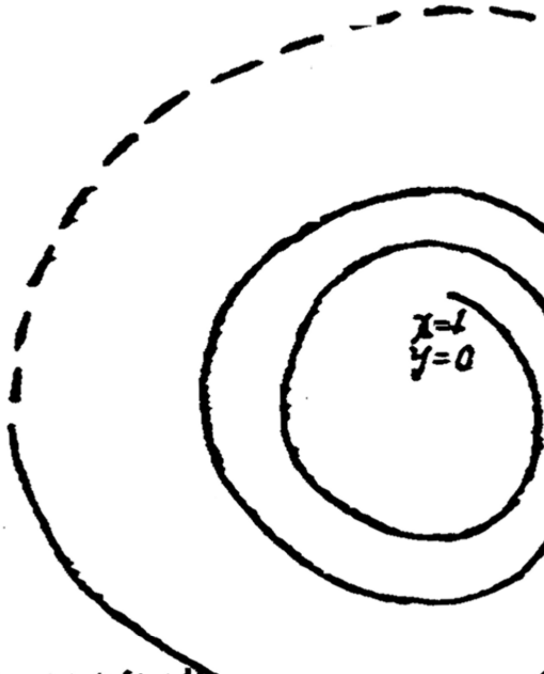
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}$$

$$\mu=1$$



$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu(1-x^4)y}{y}$$

$\mu = 0.1$



$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}$$

以上の方程式が本論文(I)の $\frac{dx}{dt}>0$, $\frac{dx}{dt}<0$ を夫々 $y>0$, $y<0$ なるところにて満足することは方程式より明かである。

(IV)は(I)方程式のリミットサイクルの曲線に従うて(I)の右辺より0.1～0.3程度の差があるだけであるならリミットサイクルの存在と解の類似とが想像せられるが実際に存在するか否かは既知の知識からはすぐにはわからない方程式である。

尤も非線型微分方程式のリミットサイクルが独立してゐる時はそのサイクルの附近にて原方程式に充分近き方程式は同じくこの附近にてリミットサイクルのあることは知られてゐる。然しそれを定量的に求めることは容易ではない。次に(V)は全く知られてゐない型の方程式である。

著者はその方程式の性質より帰納して一般に微分方程式がリミットサイクルをもつための一つの新しい充分条件を求めた。

定理 1.0 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi(x,\frac{y^2}{2})}{y}-f(x,y)$

1.1 $\varphi(x,z)$, $f(x,y)$ は第一偏微分係数まで連続 但し $y^2/2=z$ とおく

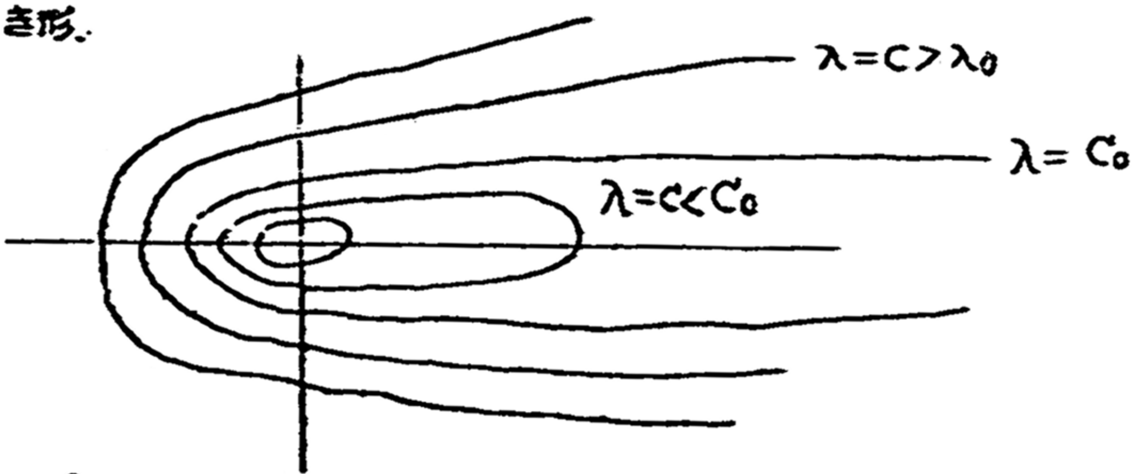
1.2 $\lambda(x,z)=C$, $C\geqq 0$ を $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi(x,z)}{y}$ の積分曲線群とする。

時式Nが存在して

$$N>\frac{\partial\lambda}{\partial z}>0$$

又 $\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0$ は $x=0$ 且その時に限る。

1.3 . 或 $C_0>0$ があって $\lambda(x,z)=C$ は $C<C_0$ なる C に対して (0,0) の周りの閉曲線, $C \geqq C_0$ なる C に対して x 中正の側(又は負の側) に無限に開いた曲線, 且 $\lambda(x,z)=0$ は原点 (0,0) とす. 即ち次図の如き形.



1.4 $f(0,0)<0$

1.5 或 $x_0>0$ が存在して $|x|\geqq x_0$ にて $f(x,y)\geqq 0$.

1.6 或 $M>0$ が存在して $|x|<x_0$ にて $0>f(x,y)\geqq -M$.

1.7 或 $x_1>x_0$ が存在して

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial z}dx > \frac{2\chi(x_0)+\lambda_1-C_0\cdots}{y^*}$$

此処で $\chi(x_0)$ は x_0, f, f' に従属する量 例へば

$$\chi(x_0)=M^2N\cdot 4x_0^2e^{2x_0K}.$$

ε は充分小なる正数. λ_1 は $\lambda(x,z)=C$ が $x=-x_0$ に切する C の値 y^* は $x=x_0$ に於ける $\lambda(x,z)=C_0-\varepsilon$ の縦坐標 K は $-x_0\leqq x\leqq x_0$ に於ける $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K|y_1-y_2|$ なる常数.

(1.0−1.7) を満足する方程式は少くとも一つ (0,0) の周囲にリミットサイクル (周期解のみの場合をも含む) をもつ.

その証明は

$$\frac{d\lambda}{dx}=-yf(x,y)\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$

から $\lambda(x,z)=\lambda_1$ と $x=x_0$ との交点Aを出発点とし方程式の解に沿うて $x=-x_0$ との交点Bまで λ を評価する. 次ぎにBよりその λ の値にて $\lambda(x,y)=\lambda$ にそうて $x=-x_0$, $(y>0)$ なる点まで到り C より再び方程式の解に沿うて $x=x_0$ との交点Dまで λ を評価する. 更にDより解に沿うて進めば,

1.7よりそれは $\lambda(xz)=C_0$ と交はることがわかる。その交点をEとする。Eより $\lambda(xz)=C_0$ に沿うて $x=x_0$ との交点A'まで到り A' より $x=x_0$ に沿うてAまで結ぶ評価式の計算より 1.1－1.7 までの條件をつかふことにより ABCDEA'A が閉曲線となることがわかり、それに沿うて解の微分係数は常にその閉曲線より内側に向ふことがわかる。

次に 1.4 より原点の周囲の充分小なる閉曲線にては解の微分係数は常にその閉曲線より外側に向ふ。

依つて上の二閉曲線の間にてリミットサイクルが少くとも一つあることがわかる。

1947.Ⅱ.10