

77. 不動点定理に就て

佐藤 徳吉

談話57にて野水氏は J. Schauder 及び A. Tychonoff の不動点定理を拡張した形で得られ *locus topologia spaco* でこの定理が成立することにその様注意してあるのを見ないやうに思ふと述べられたが、これは既に私達のところで研究してあり (但し整理した論文の形では発表してなし)、かかる定理の成立すべき空間もほぼ決定したことを明かにし、合せてこの形の定理で落付くべきものを述べたいと思ふ。(これ等は東京で本年5月に行はれた日本数学会年会の“不動点定理に就て”なる私の講演を言及してあり、中略報告として昨年12月16日日本数学会函数方程式分科会及び上届年会の講演並に雑誌 *La Funkciolaj Ekvo*

cioj Vol. 1 N-16 1, 2 (この二つを夫々 [1], [2] として引用す) に発表した。微分方程式の研究に於て最も使ひ易い定理は次の *Schauder* の定理であつた。
定理. H を *Banach* 空間における凸閉集合とする。函数 $f(x)$ は H で連続で、 $f(H)$ が H に含まれ且つ *Kompakta* ならば、少くとも一つ不動点が存在する。”

併し私は楕円型偏微分方程式 $\Delta Z = f(x, y, z, p, q)$ の *Dirichlet* 問題の研究に於てこの定理を利用しようとしたが、うまく進展せず、もつと一般な空間で成立せしめる必要に迫られた。他方福原先生は常微分方程式の折戻点の研究に於ても *Banach* 空間より一般な空間に於ける不動点定理の拡張の必要を感じて居られ、はじめは互に他が研究して居ることを知らず、殆んど同一方針の下に研究を進めて居たのである。

即ち

I) 空間として線型位相空間を目標とし、出来るだけ少い条件の空間を決定し、そこに於て不動点定理を述べることであつた。次に私にとつて問題であつたことは、

II) 函数方程式の研究に於て函数族を抽象空間として考へ、不動点定理を抽象空間の概念を媒介にして述べるが、直接函数族に関する概念のみにて述べる形にしたらどうか。

必ず利用に都合のよいものを得られるであらうと予想した。

以下 I), II) の各々に就て現在までに得られた結果を述べよう。

I) に就ては本年の数学会年会の講演で明かなやうに到達して居た結果は野水氏の定理であり、更にその拡張の可能性があることを述べた。尤も野水氏は記述を簡潔にするためか *linear topological space* や *Compact* に就て説明がないため。 恣意的に云

へば定理の成立の例は既に *J. Schauder* に依つて与へられたともいはれるが、かかる形の定理として現在最も一般的な形で述べたものである。但し少し補足的説明の必要があるかと思ふ。即ち *metric* の場合に於ける証明から推察して基本環算加法に關して連続且つ λ は (λ は実数, x は空間の点) λ 及び x の函数と

して連続は *linear topological space* をとつてゐる。(これは後に説明するやうに私達が上述の方針の下に進んで必然的に到達した空間である)。次に *Compact* は *metric space* の場合の証明で閉ぢてゐる性質を使つてゐるから *bicomact* を意味してゐる。(前に述べた *Schauder* の定理に於ける *compact* は *bicomact* を意味せず。これが施用上使ひ易い形である所以、以上の補充の下で定理は成立つ。前に述べたやうに *J. Schauder* が *linear metric space* で不動点定理の成立ため例を *Stud. Math.* 2 (1930) で挙げてゐる。ここで彼の意味してゐる *linear metric space* では $x+y$, λx の連続性は仮定されておらぬ。これ等の公理は公理 1), 2), 3) として空間に導入されてゐる。彼の公理から $x+y$, λx の連続性が出ることに並に公理間の関係については [1] を参照され度い。公理 1), 2), 3) は彼の *Cemo* (野水氏の *Cemo* と同一) を証明する途中の段階に於て必要とする性質をその終つたやうに思はれる(但し簡単な帰謬法を讀者に任ずるとして証明はなし)。次に *A. Tychonoff* は *Math. Ann.* 111 (1935) に於て *linear topologia space* で不動点定理を証明してゐるが、この場合の *linear topologia space* とは *linear Hausdorff-a space* で基本演算加法及び乗法に関して連続と断つてあり、次の定理の証明で λx は λ 及び x の函数として連続なることを使つてゐる。(今後特に断らぬ限り *linear topologia space* をこゝで説明した意味で用らる)。

Tychonoff の定理 *linear topologia space* R が n の基を有するならば、即ち R の各点が $\sum_{R=1}^n \alpha_R x_R$ の形で唯一の仕方で表されるならば、 R は n 次元 *Euklid-a space* に *linear homeomorfa* である。

即ち *Tychonoff* の不動点定理で注意すべきことは空間が更に *lokale konvekta* であると仮定してゐる。今日から見れば、これは証明の手段として必要であつて、何等本質的な條件でないのである。先づ *Schauder* の定理(今後 *Schauder* の定理と云ふときは *Stud. Math.* 2 にある *Theorem* 1であつて、始めに挙げた *Schauder* の定理と呼んだものを指

さず(この定理は *Theorem 2* となつてゐる) の証明に必要な本質的部分は *Lemma* であると思ふ。その証明を分析すれば、

(A) 任意の整数 $n (\geq 2)$ 及び任意の $\varepsilon (> 0)$ に対して次のやうな $\delta = \delta(n, \varepsilon)$ が存在する。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ を $f(\lambda_i, \theta) < \delta$ ($i = 1, 2, \dots, n$) なるやうにとれば $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$ なる任意の λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対し $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda_i$ は $f(\lambda, \theta) < \varepsilon$ を満足する。

(B) $f(a, b) = f(a-b, \theta)$ が成立する。

とほり、*Tychonoff* の不動点定理の *lokala konvekseco* は (A) と近い関係にあるが *lokale* なる *topologic* を入れた概念と *konvekcia* なる *topologic* を入れないでその概念を並用してゐるため應用上不便を感ずる。又 *Tychonoff* の定理は空間は一般化されてゐるが *Schauder* の定理をその特殊の場合として含むことが出来ない。

研究を始めた時の私は *lokala konvekseco* は空間の或る本質的性質の一面に於いて居ると感じ、(A) と *lokala konvekseco* を同時に含む概念として *lokale preskai konvekcia* なる概念を [1] で導入し、出来るだけ狭定の小さい空間で不動点定理を求めやうとしたのである。併し上記の *Tychonoff* の定理を使用したため加法及び $\lambda \chi$ は λ 及び χ の函数として連続なることを仮定してゐる。

福原先生も同様な方針で次の条件を満足する一次 D 空間で不動点定理を得られた ([1] を参照)

i) $\lambda \chi$ は λ, χ の各々に関して連続。

ii) 局部的に [1]。

さて [1] で注意したやうに加法に関して連続群なる場合 $\lambda \chi$ が $0 \leq \lambda \leq 1$ で一様連続なことから *lokala preskai konvekseco* を結論出来るが、逆に *lokala preskai konvekseco* から λ が任意の有界閉区間に属するとき $\lambda \chi$ が一様連続なることが結論出来る ([2] の定理 1 を参照、この定理は上記福原先生の結果が動機であつた) 従つて $\lambda \chi$ は λ 及び χ の連続函数となる。然るに $\lambda \chi$ が λ 及び χ の函数として連続ならば、 λ が有界閉区間に属すれば $\lambda \chi$

が一樣に連続なることが容易に結論出来、これから(A)が出る訳である。

こゝまで書きすれば〔1〕で述べた定理Aに於ける *lokale preskavi konvekca* なる仮定は特別な條件でこれを落しても定理が成立つことの証明は繰返す必要が全くない。従つて得られた定理を整理して再録すれば。

定理 "Hを *linia topologia spaco* に於ける凸集合とし、 $y=f(x)$ をHをそれぞれに寫す連続寫像とする。もし $f(H) \subseteq K \subseteq H$ なる *bikompa-kta* な集合Kが存在するならば、少くとも一つ不動点が存在する。"

野水氏の定理は述べ方がこれより少し欲いが大差なく、従つてこの定理の証明が二つ得られたことによる訳である。尤も氏の証明では一般の場合に於ける補助定理に就て説明がないが、

更にこの定理の一般化が可能であつて、これに就いて年会の講演で触れたところをもう一度述べよう。

私は *linia topologia spaco* に於て〔II〕の定理2を用ひて *deray-Schauder* 流の連続度を定義することが出来、それに依つて次の定理を得る。(未発表)

定理 "Hは *linia topologia spaco* に於ける有界(Banach的意味で)閉集合とし、その一点に関して星型とする。 $y=f(x)$ はHをそれぞれに寫す連続寫像とし $f(H)$ が *bikompa-kta* ならば少くとも一つ不動点が存在する。"

この定理からHが有界閉集合なる條件がとれないかと云ふことを注意した。当時既に私達のところでは〔1〕の方向の研究ではこれが問題であつたのである。(特く)

(1947. 12. 11)