82. 完全正則空間の Bicompactification

阪大　小松 醇郎 (1948.II.7)

R を Completely regular な空間とするとき R を含む bicompact な空間 R^* で $\overline{R}=R^*$ なるものを作る，その方法は Wallman の R^* と Čech の $\beta(R)$ とがあり周知の様に R^* は T_1 空間で，$\beta(R)$ は normal である。R^* と $\beta(R)$ との間には次の関係が成立する。

<u>定理 1</u>　R^* から $\beta(R)$ の上へ，R の点を invariant に保つ様な連続変換 φ が存在する。

此の定理は拙著位相空間論 95P 定理 5 に述べたものではありますがゴタゴタして分り難いので改訂します。尚ほ此の定理は次の証明に依らずに他の長田潤一氏の定理，即ち

<u>定理</u>　T_1 空間 R で定義された任意の有界実函数 f は Wallman の bicompactification R^* に連続拡張出来る。

を使へば簡単に導かれる。長田氏の定理は何れ発表されると思ふが此処では直接の証明を述べる。

R^* の一点 $\mathfrak{F}=\{M_\alpha|\alpha\}$ に対し $\beta(R)$ で $\{\overline{M}_\alpha|\alpha\}$ から作られる極大フィルターの収斂点を対応させる。$\{\overline{M}_\alpha\}$ から作らる極大フィルターは一意に定まるから此の対応 φ は一意に定まる。且 $\varphi(R)\equiv R$ である。

1) $\varphi(R^*)=\beta(R)$ である。$a\in\beta(R)-R$ に対し $\overline{R}=\beta(R)$ から R の有向点集合 $\psi(\mathfrak{y}|\mathfrak{D})\to a$ なるもの存在する。ψ から導かれたフィルター $\mathfrak{F}_\psi\to a$ である。$\mathfrak{F}_\psi$ を含む R の閉集合に依る極大フィルター $\mathfrak{F}$ を作れば $\varphi(\mathfrak{F})=a$ である。何となれば $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{F}_\psi$ であるから $\mathfrak{F}\to a$ 従つて $\mathfrak{F}=\{M_\alpha|\alpha\}$ とすれば $\overline{M}_\alpha\ni a$ である。

2) φ の連続のために R^* での完全有向点集合 $\psi(\mathfrak{y}|\mathfrak{D})$ をとり $\psi\to a^*$ (in R^*) だとする。$\psi(\mathfrak{y})\in R$ とすれば ψ から導かれた R に於ける閉極大フィルター $\mathfrak{F}_\psi=\{M_\alpha|\alpha\}$ は実は a^* と一致するフィルターである。何となれば若し $\mathfrak{F}'=\{F_\gamma|\gamma\}=a^*$ で $\mathfrak{F}_\psi\neq\mathfrak{F}'$ とすれば或る α,γ で $M_\alpha\cap F_\gamma=\phi$ 従つて R^* の topology

で $\overline{M_\xi} \ni x^*$ $\overline{P_y} \to a^*$ に矛盾する。従って $\psi\mathfrak{F}_\psi \to f(a^*)$, 即ち $\psi\xi \to \psi(a^*)$ である。

3) $\psi(y)$ を R の上で定義するために R の閉集合 M に対し $\beta(R)$ の閉集合 G で $G \cap R = M$, $\overline{G} = \overline{M}$ なる G をとる。G は $R-M=M'_R$ と書すとき $\beta(R)-\overline{M'_R}$ に等しくある。さて a^* の任意の基 M_ξ に閉集合 $\{M_\xi \subset R\}$ で $\psi(y)$ は単純である。今基 M_ξ 閉集合の一点 b^* とすれば $\psi(b^*) \in \overline{G_\xi}$。何となれば R^* で $b^* = \{M_\xi|*\}$ とすれば $(\forall\xi)$ $M_\xi \cap M_\xi \neq \phi$ で且つ $\overline{M_\xi} \ni \psi(b^*)$ である。従って $\{\overline{M_\xi}\}$ から作られる $\beta(R)$ での極大フィルターは $\overline{M_\xi}$ を、従って $\overline{G_\xi}$ を含む。故に $\overline{G_\xi} \ni \psi(b^*)$ 故に又 $\overline{G_\xi} \ni \psi(a^*)$.

次に a^* の凡べての基閉集合 M_ξ をとれば $\bigcap \overline{G_\xi} = \psi(a^*)$ である。何となれば $\psi(b^*) \neq \psi(a^*)$ で $\psi(b^*) \in \bigcap\overline{G_\xi}$ とすれば $\beta(R)$ の閉集合 G_1, G_2 で $G_1 \ni \psi(b^*)$, $G_2 \ni \psi(a^*)$, $\overline{G_1}\cap\overline{G_2} = \phi$ なる G_1, G_2 がとれる。今 $b^* = \{M_\xi|*\}$ とすれば $\{\overline{M_\xi}|*\} \to f(b^*)$ から $(\forall\xi)$ $M_\xi \cap G_1 \neq \phi$, $M_\xi \subset R$ から $M_\xi \cap G_1 \cap R \neq \phi$ である。故に b^* は R^* で基 $G_1 \cap R$ 閉集合の点である。同様に a^* は R^* で基 $G_2 \cap R$ 閉集合の点である。故に $\overline{G_1} \neq \overline{G_2 \cap R}$ から $\psi(b^*) \notin \overline{G_2 \cap R}$ 是 $\psi(b^*) \in \bigcap \overline{G_\xi}$ に矛盾する。

扨て $\psi(y|\mathfrak{F})$ は基 M_ξ 閉集合で単純なる故 $\psi(y|\mathfrak{F})$ は $\overline{G_\xi}$ で単純である。$\beta(R)$ で $\psi(a^*)$ の閉近傍系の基 $\{G_\omega\}$ をとり各 G_ω に対し $G_\omega \supset \overline{N_\omega}$ なる近傍系の基 $\{N_\omega\}$ を選ぶ。a^* の基 $N_\omega \cap R$ 閉集合をとれば $\psi(y|\mathfrak{F})$ は $\overline{N_\omega \cap R}$ で単純。従って $\overline{N_\omega}$ でも G_ω でも単純である。故に $\psi\mathfrak{F} \to \psi(a^*)$ である。故に ψ は連続である。

定理 2　完全正則空間 R に於ける Wallman の bicompactification R^* を作れば R での任意の有界実連続函数は R^* に拡張出来る。

証明　R での有界実連続函数 f とすれば f は $\beta(R)$ に拡張出来る。今 R^* の函数 f^* として、

$$f^*(a^*) = f(\psi(a^*)) \qquad a^* \in R^*$$

と定義すれば f^* が求むるものである。