# 83. 完全準素環ノ根基ニツイテ

身延中学　豊田五浪
(1948. II. 12)

I. 環 $M$ ガ右イデヤルニツイテ最小條件、最大條件ヲ満足スルトキハ、$M$ ノ非巾零右イデアルハ巾等元ヲ有スルコトハ正田先生ノ抽象代数学ヤ　多元数論等ニ書イテアル通リデスガ. 茲デハ最小條件ノミヲ仮定シテ同様ノ事実ヲ証明シマス.

$M_1$ ヲ $M$ ノ非巾零右イデヤルトスルト.

$$M_1 \supseteq M_1^2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq M_1^f \supseteq \cdots\cdots \quad (\neq 0)$$

ガ成立シ、最小條件ニヨリ $M_1^k = M_1^{k+1} = \cdots\cdots$

$M_1^k = M_2$ トオケバ　$M_2 = M_2^2 = \cdots\cdots$

依ツテ $m_2 \in M_2$ ヲ選ベバ. $M_2 = M_2^2$ ヨリ　$m_2 = \sum m_{21} m_{22}$, $m_{21} \in M_2$, $m_{22} \in M_2$ ト出来ルカラ. コノ和ノ項ノ中少ナクトモ一ツ例ヘバ $m_{21} m_{22} \neq 0$ ト考ヘテヨイ. 次ニ　$m_{22} = \sum m_{31} m_{32}$, $m_{31}, m_{32} \in M_2$ ト出来 $m_{21} m_{22} = \sum m_{21} m_{31} m_{32}$　前ト同様ニ $m_{21} m_{31} m_{32} \neq 0$ ト出来ル. 之ヲ続ケルト $m_{21} m_{31} m_{41} \cdots m_{s1}$ ナル積ヲ0デナイ様ニ出来ル. ($s$ ハ如何程デモ大キク出来マス) 次ニ

$$m_{21} M_2 \supseteq m_{21} m_{31} M_2 \supseteq \cdots \supseteq m_{21} m_{31} \cdots m_{s1} M_2 \supseteq \cdots\cdots (\neq 0)$$

ヲ考ヘマスト, $M$ ノ右イデヤルノ組デスカラ最小條件ニヨリ

$$m_{21} \cdots\cdots m_{s1} M_2 = m_{21} \cdots\cdots m_{s1}\, m_{s+1,1} M_2$$

$$\therefore\quad m_{21} \cdots m_{s,1}\, m_{s+1,1} = m_{21} \cdots m_{s1}\, m_{s+1,1}\, x_1 \quad (x_1 \in M_2)$$

改メテ　$a_1 = m_{21} \cdots m_{s+1,1}$ トオクト　$a_1 = a_1 x_1$　即チ

$$\therefore\quad a_1 = a_1 x_1 = a_1 x_1^2 = \cdots = a_1 x_1^{f_1} = \cdots\cdots \quad (1)$$

同様ニ

$$x_1 M_2 \supseteq x_1^2 M_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq x_1^{f_1} M_2 \supseteq \cdots\cdots (\neq 0)$$

$$\therefore\quad x_1^{f_1-1} M_2 = x_1^{f_1} M_2 \quad x_1^{f_1} = x_1^{f_1} x_2 \quad (x_2 \in M_2)$$

以下繰返シテ

$$x_t^{\rho_t} = x_t^{\rho_t} x_{t+1} = x_t^{\rho_t} x_{t+1}^2 = \cdots\cdots = x_t^{\rho_t} x_{t+1}^{\rho_{t+1}} = \cdots\cdots (x_r \in M_r)$$

次ニ$M_a$ハ$ax=0$ $(x \in M)$ナルMノ元集合トシマスト $M_a$ハ右イデアル.

デ $M_{a_1} \supseteq M_{x_1^{\rho_1}}$ 何故ナラ(i)ヨリ $x_1^{\rho_1} x = 0$ ヨリ $a_1 x = 0$ガ従ヒマス.

同シテ $M_{a_1} \supseteq M_{x_2^{\rho_2}} \supseteq M_{x_3^{\rho_3}} \supseteq \cdots\cdots$

最小條件ニヨリ $M_{x_k^{\rho_k}} = 0$カ 又ハ $M_{x_k^{\rho_k}} = M_{x_{k+1}^{\rho_{k+1}}} = \cdots\cdots$

前者ナラバ $x_k^{\rho_k} = x_k^{\rho_k} x_{k+1}^{\rho_{k+1}} = x_k^{\rho_k}(x_{k+1}^{\rho_{k+1}})^2$ヨリ $x_k^{\rho_k}(x_{k+1}^{\rho_{k+1}} - (x_{k+1}^{\rho_{k+1}})^2) = 0$

即チ $x_{k+1}^{\rho_{k+1}} = (x_{k+1}^{\rho_{k+1}})^2$ 故ニ $x_{k+1}^{\rho_{k+1}}$ガ巾等元.

後者ナラバ. $x_k^{\rho_k} = \alpha_k$, $x_{k+1}^{\rho_{k+1}} = \alpha_{k+1}$トオイテ $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_k \alpha_{k+1}^2$

ノ $\alpha_k(\alpha_{k+1} - \alpha_{k+1}^2) = 0$ 故ニ $\alpha_{k+1} - \alpha_{k+1}^2 \in M_{\alpha_k^{\rho_k}} = M_{x_{k+1}^{\rho_{k+1}}}$

従ツテ $\alpha_{k+1}(\alpha_{k+1} - \alpha_{k+1}^2) = 0$ $\alpha_{k+1}^2 = \alpha_{k+1}^3$. 之レヨリ

$\alpha_{k+1}^2$ガ巾等元.

故ニ

定理1. Mニ於テ. 右イデアルニツキ最小條件ガ成立スルトキハ非巾零右イデアルハ少クトモ一ツノ巾等元ヲ有ス。

之レヨリ Mノ根基ガ存在シテ巾零ナルコトガ云ヘマス. 即チMノ Nilideal ハコノ定理カラ nilpotent デナクテハナリマセンカラ. スベテノ巾零右イデヤルノ合併集合ヲRトスルトRハMノ Nilideal デ且 nilpotent デナクテハナリマセン。

II. 次ニ秋月先生ガ全國紙上1935年ニ Teilerkettensatz Vielfachenkettensatz ト通シテ regular ナ可換環 昇鎖律→約鎖律ナルコトヲ証明シテオラレマスガ. コヽデハ昇鎖律→約鎖律ハ完全準素環(ノ直和)デモヨイコトヲ示シマス。

先ヅ完全準素環ハ主単位元ヲ有シ、根基ヲRトスルト $M/R$ ガ体ヲナス環デスガ 最初條件ヲ仮定シテオキマスト 定理1ニヨリPガ存在スルコトガ出来マス。

従ツテコレカラ Mハ右イデヤルニツキ最小條件ノトヲ満足シ 主単位元ヲ有シ. $M/P$ ガ体デアルトシマス。

定理2. NガMノ最小巾零右イデヤルナラバ $N = rM$ $(r^2=0)$

証．$r\in N$ トスルト $rM\neq 0$ ハ右イデヤルデNガ最小ナルコトヨリ $rM=N$.
又 $N^2\neq 0$ ナラ $N^2\subseteq N$ ヨリ．$N^2=N$．Nガ非巾零トナリ．少ナクトモ一ツノ巾等元ヲ有スルカ M ハ唯一ノ巾等元デアル主単位元 e ヲ有スルノミデアルカラ $M\subseteq N$ 之レ矛盾 故ニ $N^2$ ハ0ナルコトモ分ル．

(Deuring・Algebren 参照)

定理3 Mノ最小巾零右イデヤルNニツイテハ $NR=0$

証 $NR\subseteq N$ ダカラ $NR\neq 0$ トスルト $NR=N$ 即チ $rMR=rM$ $MR=R$ ナル故 $rR=rM$. $r\in rM$ ヨリ $r\in rR$. 従ッテ $r=rr_1$ $(r_1\in R)$ 然ルニ $r_1$ ガ巾零元ナル故 之レハ $r\neq 0$ ナル以上不成立．
故ニ $NR=0$.

定理4. $N=rM\cong rK$ [Kハ$M/R$ニ同型ナ体]

証 $rR=0$ ダカラ $rm\neq 0$ [$m\bar{\in}R$. $m\in M$] ヲ云フ．モシ $rM_r=0$ トスルト ($M_r$ ハ $rx=0$ ナル $x\in M$ ノ元集合) $M_r\supseteq R$ ナル右イデヤルデ $M_r$ ガ R ニ等シクナケレバ，非巾零．従ッテ $e\in M_r$ [定理1] 故ニ $M\subseteq M_r$ ∴ $M=M_r$. コレカラ $rM=0$. 之レハ不可能デアルカラ．$m\bar{\in}R$ デナケレバ $rm\neq 0$. 故ニ $ra=ra'$ [$a, a'\in M$] ナラ $r(a-a')=0$. $a-a'\in R$ 従ッテ $ra$ ハ R ヲ E トスル M ノ類ニヨリテ決定サレルカラ．$rM\cong r(M/R)$ ト考ヘラレ．$M/R\cong K$ トスルト．$rM\cong rK$. K ノ主単位作用素 E ニツイテハ $rE=r$ ト決メルコト勿論デアル．ツマリ．N ヲ K ニ右加群ト考ヘテ宜シイ．

定理5. Mノ最小巾零右イデヤルハK-右加群トシテ作用同型デアル.

証．定理4ヨリ明ラカ．

定理6. Mノスベテノ最小巾零右イデヤルノ合併集合$R_1$ハMノイデヤルデアル．

証 Nヲ最小巾零右イデヤルノ一ツトスルト．$mN$ ($m\in M$) ハ0カ又ハ0デナイ．$mN\neq 0$ ノ時ハ $mN$ ハ N ニ作用準同型デスカラ $mN$ モ最小巾零右イデヤルトナリ（Nガ最小トナルコトカラ）$mN\subseteq R_1$. 故ニ $mR_1\subseteq R_1$ $R_1m\subseteq R_1$ ハ明白デアル．

定理7. $r\in R$ トシ．モシ $rR=0$ ナラバ $rM$ ハ最小巾零右イデヤルデアル．

証．定理4ノ証明ニアル如ク $rm\neq 0$. $m\bar{\in}R$ デスカラ $rm=rm'$ ナラバ

$r(m-m')=0.$ $m\equiv m' \pmod{R}$ 故ニ $rM\cong r(M/_K)\cong rK.$

コノ $rK$ ガ最小デナイトスルト $N_1\subset rK$. $r\in N_1$ トシテ. $r.K\subset rK$

故ニ $r_1=rk$ $\quad rk^{-1}=r.$ $\therefore$ $r\in 乃 K=N_1$ $\therefore$ $N_1=rM.$

定理 8. $N$ ヲ $M$ ノ巾零右イデアルトシ $NR=0$ ナラバ $N\subseteqq R_1.$

証. $n\in N$ トシマスト $nR=0$. 故ニ $nM$ ハ $M$ ノ最小巾零右イデヤル.

(定理7) $\quad\therefore$ $n\in R_1.$ $\therefore$ $N\subseteqq R_1.$

定理 9. $\widehat{M}=M/_{R_1}$ ノ最小巾零右イデアル $\widehat{N}=\widetilde{r}\widehat{M}$ ノ元 $\bar{r}$ (即チ $M$ ノ類) ヨリ $M$ ノ元 $r$ ヲトレバ $rR\neq 0.$

証 モシ $rR=0$ ナラバ $r\in R_1$ デ $\bar{r}=\bar{0}.$ [$\bar{0}$ ハ $\overline{M}$ ノ零] コレハ $\bar{r}\overline{M}\neq 0$ ニ矛スル. ($M$ ニ於テ右イデアルニツキ最小条件ガ成立スルナラバ $\overline{M}=M/_{R_1}$ ニ於テモ成立スル.)

定理10. $\overline{M}$ ガ根基 $\overline{R}$ ヲ有スルナラバ $\overline{R}=R/_{R_1}$ デ $\overline{M}$ ノ最小巾零右イデヤルノ和集合ヲ $\overline{R_1}$ トスルト $\overline{R_1}=R_2/_{R_1}$ デ且ツ

$$R_2R\neq 0 \qquad R_2R^2=0 \qquad [\text{時ニ } R_2^3=0]$$

ガ成立スル.

証. 定理9ヲ参照シテ $\overline{R}.\overline{R}=\bar{0}$ ヨリ $R_2R\subseteqq R_1$. 故ニ $R_2R^2=0.$ 又 $R_2R=0$ ナラバ $R_2\subseteqq R_1$ トナル (定理8) カラ. $R_2/_{R_1}=\overline{R}_1\neq 0$ ニ反ス. $\therefore R_2R\neq 0.$

コノ定理ニヨツテ $\overline{M}$ ニ於テモ $\overline{R}$ $\overline{R_2}.\overline{R_1}$ ノ存在ガ云ヘテ $\overline{R_2}\,\overline{R}\neq\bar{0}$ $\overline{R_2}\,\overline{R}^2=\bar{0}$ ガ出マス. 従ツテ $(R_3/_{R_1})(R/_{R_1})\neq\bar{0}$. ($\overline{R_2}=R_3/_{R_1}$) 即チ $R_2R\neq R_1$. 之レヨリ $R_3R^2\neq 0$ トナリマス. 何故ナラ. $R_3R^2=0$ ナラバ $(R_3R)R=0$ ニヨリ $R_3R\subseteqq R_1$ トナリマスカラ $\overline{R_2}\,\overline{R}^2=\bar{0}$ ヨリハ $R_3R^3=0$ ガ出マス. コノ様ニシテ. $\quad R_1\subset R_2\subset R_3\subset\cdots\cdots\subset R\subset M$

ヲ作ツテ行ケバ,

$$R_iR^{i-1}\neq 0, \quad R_iR^i=0$$

トナリマスガ $R^f=0$ $\quad R^{f-1}\neq 0$ トシマスト $R_fR^{f-1}=0$ [$R_f\subseteqq R$] ハ不可能デスカラ $R_{f-1}=R$ デナクテハナリマセン. 即チ

$$R_1\subset R_2\subset\cdots\cdots\subset R_{f-1}=R\subset M. \tag{2}$$

サテ記号的ニ,

$$R_2/R_1 = \overline{R_1}. \quad R_3/R_2 \cong {}^{R_3/R_1}/{}_{R_2/R_1} = \overline{R_2}/\overline{R_1} = \overline{\overline{R}}_1,$$

$$R_4/R_3 \cong {}^{R_4/R_1}/{}_{R_3/R_1} = \overline{R_3}/\overline{R_2} \cong {}^{\overline{R_3}/\overline{R_1}}/{}_{\overline{R_2}/\overline{R_1}} = \overline{\overline{R}}_2/\overline{\overline{R}}_2 = \overline{\overline{\overline{R}}}_3, \cdots$$

様ニカケマスカラ、以下コノ記号ヲ用ヒマス。

定理11. $M$ ヲ $R_1$ ハ $R_1 = r_1M + \cdots + r_nM$ ($r_iM$ ハ最小の零右イデヤル)

証. $K$ ヨリ一ツノ最小の零右イデヤル $r_1M$ ヲ取リ出ス. $R_1$ ガ他ニ $r_2M$ ナル最小の零右イデヤルヲ含メバ $(r_1M)(r_2M)=(r_2M)(r_1M)=0$ デ(定理3), $r_1M+r_2M \subseteq R_1$ 更ニ $r_3M$ ガアッテ

$$r_1M \subset r_1M + r_2M \subset r_1M + r_2M + r_3M$$

トスルト $(r_1M)(r_2M)=(r_2M)(r_3M)=0$ デ 例エバ

$$r_1M \subseteq r_2M + r_3M$$

トハナラヌ。何故ナラ $r_1 \in r_2M + r_3M$ ナラバ $r_1 \in r_2K + r_3K$ ト書ケカエテ. $r_1 = r_2k_2 + r_3k_3$ $r_1k_3^{-1} - r_2k_2k_3^{-1} = r_3$ トナリ

$$r_3 \in r_1K + r_2K$$

デ上ノ事柄ニ反スル。従ッテモシ

$$r_1M \subset r_1M + r_2M \subset r_1M + r_2M + r_3M \subset \cdots\cdots \text{ ト行ッテ}$$

$$R_1 = r_1M + r_2M + \cdots\cdots \text{ トナルナラバ逆ニ}$$

$$r_1M + r_2M + \cdots\cdots \supset r_2M + r_3M + \cdots\cdots \supset r_3M + \cdots\cdots \supset \cdots$$

ガ成立シナケレバナラナクナリ. 之レハ最小條件ニ反シマスカラ

$$R_1 = r_1M + \cdots\cdots + r_nM$$

同様ニ

$$\overline{R}_1 = \bar{r}_1\overline{M} + \cdots\cdots + \bar{r}_n\overline{M}$$

$$\overline{\overline{R}}_1 = \bar{\bar{r}}_1\overline{\overline{M}} + \cdots\cdots + \bar{\bar{r}}_n\overline{\overline{M}}$$

---

ガ成立シマス. 然ニ勿論 $\bar{r}_1\overline{M} \cong \bar{r}_1(\overline{M}/\bar{0}) = \bar{r}_1\left({}^{M/R_1}/{}_{R_1/R_1}\right)$
$\cong \bar{r}_1(M/R) \cong \bar{r}_1K$ 当ルデス.

定理11ニヨリ $R_1$ ニ含マレル $M$ ノ右イデヤルニツイテハ昇鎖律→降鎖律ナルコトガ分リマシタガ $R_1$ ト $R_2$ ノ間ニアル右イデヤルノ鎖

$$R_1 \subset R_{11} \subset R_{12} \subset \cdots\cdots \subset R_2 \qquad (5)$$

ニツイテハ次ノ如ク考ヘマス.

$$\bar{0} \subset R_{11}/R_1 \subset R_{12}/R_1 \subset \cdots\cdots \subset R_2/R_1$$

書カエテ $\overline{R_{11}} \subset \overline{R_{12}} \subset \cdots\cdots \subset \overline{R_1}$

然ルニ定理11ニヨリコレハ有限ノ節デ終ラネバナリマセンカラ

$$\overline{R_{1i}} = \overline{R_{1,i+1}} = \cdots\cdots$$

即チ $R_i'/R_1 = R_{1,i+1}'/R_1 = \cdots\cdots$

依ツテ $R_{1i}' = R_{1,i+1}' = \cdots\cdots$ 〔$R_{1i} \subset R_{1,i+1}$ ダカラ〕

従ツテ (3) ハ

$$R_1 \subset R_{11}' \subset R_{12} \subset \cdots\cdots \subset R_{1K} = R_2$$ トナリマス

以下同様ニシテ $R_i$, $R_{i+1}$ ノ間ニ右イデヤルノ組成列ガ存在シ (2)ヨリ結局 $M$ニツイテハ 右イデヤルノ組成列ガ少ナクトモ 一ツ存在シマス.

## III. 可換環ノ場合.

$M$ガ totalnullteiler ヲ有セズ. イデヤルニツイテ最小條件ヲ満足スルトキハ〔一般理論ノ意味ニ於テ〕ノ完全準素環ノ直和ニナルコトヲ云ヘバ結論律ー致スル事ガ出マス.

大体ノ要領ヲ云ヒマスト,

$M$ガ totalnullteiler ヲ有セズ最小條件ヲ満足スルコトヨリ少クトモ一ツノ巾等元 $e_1$ ヲ有シ, Peirce ノ分解

ノ $M = e_1 M + M_{e_1}$ 〔$M_{e_1}$ ハ $e_1 x = 0$ $x \in M$ ノ集合〕

ソシテ $M_{e_1}$ ガ非巾零ナルコトガ totalnullteiler ノ非存在ヨリ云ヘマス. 依ツテ $e_2 \in M_{e_1}$ ガアリ 結局

$$M = e_1 M + \cdots\cdots + e_n M$$

$$e = e_1 + e_2 \cdots\cdots + e_n$$

$e_i$ハ$M$ノ主單位元トナリマス. $e$ガ若シ $e_i = e_i' + e_i''$ $(e_i' e_i'' = 0)$ ノ如ク巾等元ノ和ニ分解不可能ナラバ $e_i M$ ハ 完全準素環ニナリ $e_i M$ニ於テデモ最小條件ガ成立シテ居リマス. 依ツテ前節ノ理論ハ成立シマス.