85. 位相完備について

阪大 長田 潤一 (1948. II. 14)

Shanin (Doklady 1943. No.38. No5-6) ノ論文 Th.4 ヲ用ヒテ metric space ガ位相完備ノタメノ必要充分條件ハ完備ニ距リツケ得ルコトデアルコトヲ証明スル。

必要

R ガ位相完備ダカラ Čech ノ $\beta(R)$ ノ中デ G_δ ナルトコロガ R ハ metric ナル故ニ正規故ニ $\beta(R)$ ハ Wallman ノ bicompact 化 $\omega(R)$ ト一致スル。即チ Shanin ノ ω_{F_R} extension トナル。ソコデ Shanin ノ Th.4 ヲ用ヒルト vanishing ω-family in F_R ノ集合 $\{\mathfrak{X}_n\}$ デ $|\{X_n\}| \leqq n$ ニシテ任意ノ max. vanishing ω-family in F_R Z ニ對シ $X \in \mathfrak{X}_n$ $X \in Z$ ナル X ガ存在スル如キ $\{\mathfrak{X}_n\}$ ガアル。

X_α ハ Complement ヲ考ヘルト開ヒフクヲナス。コレヲ $\mathfrak{M}_n$ トシルス。R ハ metric ナル故、可ツ コノ位相ニ合致スル一様ヒフク系ノ列 $\{R_n\}$ ガアルカラ $\mathfrak{M}_n$ ヘ R_n ヲアラタメテ $\mathfrak{M}_n$ トオク。$\{\mathfrak{M}_p \wedge \mathfrak{M}_q\}_{p,q} = \Delta_0 \{\mathfrak{M}_n\}$ ト

トシカツ.

又 R ハ metric ナル故全体正規ノ故ニ

$\exists\ \mathfrak{g}_n^{\Delta} < \mathfrak{M}_n\ (\forall n)$ 故ニ $\{\mathfrak{g}_n\} = \Delta^{-1}\{\mathfrak{M}_n\}$ トスルト.

$$\{\mathfrak{M}_n\}_{(1)} = \{\mathfrak{M}_n\} + \Delta_0\{\mathfrak{M}_n\} + \Delta^{-1}\{\mathfrak{M}_n\}$$ トオク同様ニ

$$\{\mathfrak{M}_n\}_{(2)} = \{\mathfrak{M}_n\}_{(1)} + \Delta_0\{\mathfrak{M}_n\}_{(1)} + \Delta^{-1}\{\mathfrak{M}_n\}_{(1)}$$

.... トツヾク.

$\{\mathfrak{M}'_n\} = \{\mathfrak{M}_n\}_{(1)} + \{\mathfrak{M}_n\}_{(2)} + \cdots\cdots$ ヲ考ヘルト.

$$|\{\mathfrak{M}'_n\}| \leqq \aleph_0$$

シカモ $\mathfrak{M}'_a, \mathfrak{M}'_b \in \{\mathfrak{M}'_n\} \to \exists\ \mathfrak{M}'_c \in \{\mathfrak{M}'_n\} : \mathfrak{M}'_c < \mathfrak{M}'_a \wedge \mathfrak{M}'_b$

又 $\mathfrak{M}'_a \in \{\mathfrak{M}'_n\} \to \exists\ \mathfrak{M}'_d \in \{\mathfrak{M}'_n\} : \mathfrak{M}'^{\Delta}_d < \mathfrak{M}'_a$

故ニ $\{\mathfrak{M}'_n\}$ ハ位相ニ合致スル一様ニフク系ノキニナツテキル.

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{M}'_1,$$
$$\mathfrak{M}'^{*}_{n_2} < \mathfrak{n}_1 \to \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{M}'_{n_2} \wedge \mathfrak{M}'_2$$
$$\mathfrak{M}'^{*}_{n_3} < \mathfrak{n}_2 \to \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{M}'_{n_3} \wedge \mathfrak{M}'_3.$$

-- ------ --

トオクト. $\{\mathfrak{n}_n\}$ ハ $\mathfrak{n}^{*}_{n+1} < \mathfrak{n}_n$ デ $|\{\mathfrak{n}_n\}| \leqq \aleph_0$
ナル位相ニ合致スル一様ヒフク系ノキデアル.
ココデ位相空間論 P.11.3 ヘ(Urysohn ノ定理)ノ方法ヲモッテ $\{\mathfrak{n}_n\}$ ヲ使ッテ R ニ metric ヲ
入レルト ($\{\mathfrak{n}_n\}$ ナル一様位相ニ合致スル metric) コノ metric デ R ハ
complete ニナル. ソレヲイフニハスベテ closed 有限交叉系ヲ考ヘ Cauchy
ダト vanishing デナイコトヲイフトヨイ (コノ metric ハ明ラカニ topology
ニ一致スル) ニコトガイヘルト. 任意ノ Cauchy filter $\{A_\lambda\}$ ヲ考ヘルト
$\{\overline{A}_\lambda\}$ モ Cauchy ニナル. ソレハ任意ノ $\mathfrak{n}_n$ ニ対シ $\mathfrak{n}_{n+1}$ ヲ考ヘルト a, b
$\in A_\lambda \to \exists\ N \in \mathfrak{n}_{n+1} : a, b \in N$ ナル A_λ ガ存在スル. シカルニ $x, y \in \overline{A}_\lambda$
ナラ $\exists\ N_1 \ni x,\ N_2 \ni y \in \mathfrak{n}_{n+1}$ $\therefore N_1 \cdot A_\lambda,\ N_2 A_\lambda \neq \phi$
故ニ A_λ ノトリ方ト $\mathfrak{n}^{*}_{n+1} < \mathfrak{n}_n$ ナルコトカラ
$\exists\ M \in \mathfrak{n}_n : M \supset N_1 + N_2 \ni x, y$ 故ニ $\{\overline{A}_\lambda\}$ モ Cauchy
仮定 closed 有限交叉ダカラ vanishing デナイ即チ $\exists\ x : x \in \overline{A}_\lambda\ (\forall \lambda)$

即チ $\{A_\alpha\}$ ハ増点ヲモツ $\{A_\alpha\}$ ハ Cauchy ナル故ニ $\{A_\alpha\}$ ノ収束点トナル。即チ任意ノ cauchy filter ハ収束スルカラ R ハ complete トナル。

故ニ結局 vanishing ダト cauchy デナイコトガイヘルトヨイ。又結局 max. vanishig ω-family in $\mathfrak{F}_R$ ガ Cauchy デナイコトカイヘルトヨイ。

任意ノ max: vanishing ω-family in $\mathfrak{F}_R$ $\{F_\alpha\}$ ヲ考ヘルト。

$$\exists\{F_{\alpha_i}\}\in\mathfrak{N}.\ \{F_\alpha\}\supset\{F_{\alpha_i}\}$$

$\{F^c_{\alpha_i}\}=\mathfrak{M}_n$ トスルト $\exists\mathfrak{N}_n<\mathfrak{M}_n.\ \mathfrak{N}_n\in\{\mathfrak{N}_n\}$

$$\mathfrak{N}^*_{n+1}<\mathfrak{N}_n<\mathfrak{M}_n$$

トコロガ $\{F_\alpha\}$ Cauchy トスルト $\exists F_\alpha: S(a,\mathfrak{N}_{n+1})\ F_\alpha\quad (a\in F_\alpha)$

$\exists F_{\alpha_i}:\ S(a\ \mathfrak{N}_{n+1})<F^c_{\alpha_i}\in\mathfrak{M}_n;\ F_{\alpha_i}\in\{F_{\alpha_i}\}\subset\{F_\alpha\}$

$\therefore F_\alpha\ F_{\alpha_i}=\phi$ コレハ $\{F_\alpha\}$ ノ有限交ナ性ニ反スル。故ニ $\{F_\alpha\}$ ハ Cauchy デナイ。

充分ニRヲ完ニナ metric space トスル。モシモ R ガ totally boundid ナラ bicompact トナルカラ問題ナイカラソウデナイトスル。

$\{S(x,\frac{1}{2n})\}$ ノ有限コデ R オホヘナイトシテヨイ。

$(S(x,\frac{1}{2n})$ ハ x 中心半径 $\frac{1}{2n}$ ノ円。$n=1,2\cdots\cdots)$

故ニ $\{\{S^c(x,\frac{1}{2n})\}_x\}=\{\mathfrak{X}_n\}$ ， anishing a-family in $\mathfrak{F}_R$ ノアツマリデ可附ノ power ヲモツ。

任意ノ max. vanishing ω-family in $\mathfrak{F}_R$ X ヲトルト R ガ完備ナコトカラコレハ Cauchy デナイ

$$\exists n:\forall_x\ S(x,\tfrac{1}{2n})\ \not\supset F\quad(\forall F\in X)$$

$$\therefore S^c(x\ \tfrac{1}{2n})\cdot F=\phi$$

X ガ max ナル故 $S^c(x,\frac{1}{2n})\in X$

$$\therefore\ \mathfrak{X}_n\subset X \text{ シカモ } |\{\mathfrak{X}_n\}|=\aleph_0$$

又コノトキRハ normal デ $\beta(R)$ ト $\omega(R)$ ハ一致シテルカラ Shanin ノ Th 4 ヲ $\{\omega.\mathfrak{F}_R\}$ extension ノ場合ニ用ニRハ位相完備デアル。

終

コレデミルト一般ニ $\{\mathfrak{N}_\iota\}$ ナル uniformity ヲモツ uniform space ガ位相完

ナ必要充分條件ハ $\{\mathfrak{M}_y\}: |\{\mathfrak{M}_y\}| \leqq |\{\mathfrak{M}_x\}|$
ナルコノ空間ヲcompleteニスル(topologyヲカヘナイ)uniformity $\{\mathfrak{M}_y\}$ ノトレルコトデアル.