87. 天秤デ球ヲ見分ケル問題ニツイテ

(名大理学部数学科学生) 永田 雅宜 (1948.II.19)

"ℓ個ノ球ノウチニ重サノ異ナル球ガ唯一個アル。(重イカ軽イカワカッテ居ナイ)コノトキコノ球ノイクツカヅヅヲ天秤ニ乗セテ重サノ異ナルモノヲ見出ス。天秤ノ操作ノ回数kト球ノ数ℓノ関係ヲ求ムル事"

トイフノガ　モトモトノ問題デアル。コノ問題ト同時ニコノ問題ヲ多少変更シタモノヲ考察スル。

記号及ビ用語ニツイテ次ノコトヲ約束スル。

(イ) $\frac{x}{y} \leqq n$ ナル自然数nノ最小ヲ $\left(\frac{x}{y}\right)$ デ表ハス。

(ロ) 球ノ組ニツイテ用語、記号ヲ集合ト同ジニ用ヰル。

(ハ) 一ツノ組Aノ内ニハ重イモノハナイガ軽イモノガアルカモ知レズ、他ノ組Bノウチニハ軽イモノハナイガ重イモノガアルカモ知レヌトイフトキ、$A<B$デ表ハス。換言スレバ$A+B$トニ個数ノ差ガアレバ正常ナルモノヲ加ヘテ同数トシ天秤ニカケレバAヲ含ム組ガ軽イコトヲ表ハス。

(ニ) $A<B$ガアッタトキ、$A+B$ニ含マレテ居ル球ハ断ラナイ限リスベテ正常カ異

常カ分ラナイモノバカリデアルトスル。

(ホ) Aノ含ム球ノ個数ヲ $\overline{\overline{A}}$ デ表ハス。

§1. 不等式カラ出発シテ異常ノ球ヲ見出シ得ル回数ニツイテ

(1.1) $A < B$ガ與ヘラレタトキ，コレガアト k 回デ異常ノ球ガ見出サレルトスレバ イカニ正常ノ球ノ用意ガアツタトシテモ $x \equiv \overline{\overline{A+B}} \leqq 3^k$ ヲ要スル。

(1.2) 現ニ正常ノ球 1 個ノ用意ガアルトキ $x \equiv \overline{\overline{A+B}} \leqq 3^k$ ナラバ アト k 回デ必ズ異常ノ球ヲ見出シ得ル。

コノ二ツヲ証明スル為ニ先ヅ補題ヲ準備スル。

[補題]

今 $A < B$ トスル。 $\begin{cases} A = A_1 + A_2 + A_3 \ (\text{直和}) \\ B = B_1 + B_2 + B_2 \end{cases}$ トシテ $A_1+B_2+A_2+B_1$ トヲ比ベル。

コノ際正常ノ球ヲ加ヘルカモシレナイ。然ラバ明ラカニ

(1) $A_1 + B_2 < A_2 + B_1$ ナラバ，$A_1 < B_1$

(2) $A_1 + B_2 > A_2 + B_1$ ナラバ $A_2 < B_2$

(3) $A_1 + B_2 = A_2 + B_1$ ナラバ $A_3 < B_3$

[(1.1)ノ証明]

上ノ補題ノヤウニシテ比ベテ見ル。今 $A_i < B_i$ ガ得ラレタ時，モシ $\overline{\overline{A_i+B_i}} = 1$ ナラバ不明ノ球ガ見出サレルコトニナルガ，サモナケレバ $A_i + B_i$ ノ球ハ相変ラズ不明デアリ，ソノ他ノ球ハスベテ正常デアルコトガ分ル。

$$\overline{\overline{A_1+B_1}} + \overline{\overline{A_2+B_2}} + \overline{\overline{A_3+B_3}} = \overline{\overline{A+B}} = x$$

ナル故ニ (1),(2),(3) ノ場合ノ中何レカニオイテハ、

$$\overline{\overline{A_i+B_i}} \geqq \left(\frac{x}{3}\right)$$

トナル。ヨツテ $x > 3^k$ ナラバ k 回デ見出サレナイ場合ガ起リ得ル。故ニ $x \leqq 3^k$ ナルヲ要スル。

[(1.2)ノ証明]

上ノ補題ニ於テ $\overline{\overline{A_i+B_i}} \leqq \left(\frac{x}{3}\right)$ $(i = 1.2.3)$ ガ得ラレルヤウニ分割出来レバヨイ。但シ正常トワカツテ居ル球ハ高々1個シカ用ヰナイコトニスル。ソレニハAヲ三ツノ組 X_1, X_2, X_3 ニ分ケテ $\overline{\overline{A}} \equiv 0 \pmod{3}$ ナラバ X_1, X_2, X_3

ヲ $\overline{\overline{A}}/3$ 個ヅツニスル。$\overline{\overline{A}} \equiv 1 \pmod 3$ ナラバ

$$\overline{\overline{x_1}} = \left(\frac{\overline{\overline{A}}}{3}\right) = \frac{\overline{\overline{A}}+2}{3},\quad \overline{\overline{x_2}} = \overline{\overline{x_3}} = \left(\frac{\overline{\overline{A}}}{3}\right)-1 = \frac{\overline{\overline{A}}-1}{3}$$

トシ。$\overline{\overline{A}} \equiv 2 \pmod 3$ ナラバ

$$\overline{\overline{x_1}} = \overline{\overline{x_2}} = \left(\frac{\overline{\overline{A}}}{3}\right) = \frac{\overline{\overline{A}}+1}{3},\quad \overline{\overline{x}} = \left(\frac{\overline{\overline{A}}}{3}\right)-1 = \frac{\overline{\overline{A}}-2}{3}$$

トスル。Bニツイテモ同様 Y_1, Y_2, Y_2 ニ分ケル。明ラカニ $\overline{\overline{x_1}} \geq \overline{\overline{x}} \geq \overline{\overline{x_3}}$, $\overline{\overline{Y_1}} \geq \overline{\overline{Y_2}} \geq \overline{\overline{Y_3}}$ デアル。イヅレモ少クトモ一回ハ等号ガ成立スル。

(イ) $\overline{\overline{x_1}} = \overline{\overline{x_2}} = \overline{\overline{x_3}}$ 又ハ $\overline{\overline{Y_1}} = \overline{\overline{Y_2}} = \overline{\overline{Y_3}}$ ノ少クモ一方ガ成立スレバ 補題

ノ $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3$ ヲ夫々 $X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3$ トスレバヨイ。

(ロ) $\overline{\overline{x_1}} > \overline{\overline{x_2}} = \overline{\overline{x_3}}$ $\overline{\overline{Y_1}} > \overline{\overline{Y_2}} = \overline{\overline{Y_3}}$ ナル時 補題ノ $A_1, A_2, A_3, B_1,$

B_2, B_3 ヲ夫々 $X_1, X_2, X_3; Y_3, Y_2, Y_1$ トオイテ見レバヨイ。

(ハ) $\overline{\overline{x_1}} = \overline{\overline{x_2}} > \overline{\overline{x_3}}$, $\overline{\overline{Y_1}} = \overline{\overline{Y_2}} > \overline{\overline{Y_3}}$ ノトキ。$A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3$ ヲ夫々

$X_1, X_3; X_2, Y_1, Y_2, Y_3$ トスル。

(ニ) $\left.\begin{matrix}\overline{\overline{X_1}} > \overline{\overline{X_2}} = \overline{\overline{X_3}} \\ \overline{\overline{Y_1}} = \overline{\overline{Y_2}} > \overline{\overline{Y_3}}\end{matrix}\right\}$ 又ハ $\left.\begin{matrix}\overline{\overline{x_1}} = \overline{\overline{x_2}} > \overline{\overline{x_3}} \\ \overline{\overline{Y_1}} > \overline{\overline{Y_2}} = \overline{\overline{Y_3}}\end{matrix}\right\}$ ナルトキ $A_1, A_2, A_3; B_1,$

B_2, B_3 ヲ夫々 $X_1, X_2, X_2; Y_3, Y_2, Y_1$ トスル。

コレデ全部ノ場合ヲ書シタコトニナルガ、何レノ場合ニモ個数ノ不揃ハ高々一個デアルカラ ツケ加ヘルベキ正常ノ球ハ高々一個デヨイ。

§2. 正常ト分ッテ居ル球ヲ用ヰテヨイ立場ニ於ケル始メノ問題ノ考察

(2.1) 正常トワカッテ居ル球ガイクラ用意シテアッテモ k 回デ見出スタメニハ $\ell \leq \frac{3^k+1}{2}$ ナルコトヲ要スル。

(2.2) 逆ニ1個正常ノ球ノ用意ガアレバ $\ell \leq \frac{3^k+1}{2}$ ナラバ十分デアル。

[(2.1) ノ証明]

最初ノ操作ニヨツテ一ツノ不等式ガ得ラレレバソレガ $k-1$ 回デ出来ナクテハナラナイ。ヨツテ天秤ニノセル球ノ個数 x ハ (1.1) ニヨリ $x \leq 3^{k-1}$ デアル。

天秤ガ釣合ッタトキニハ残シタ球カラ $k-1$ 回デ見出シ得ナクテハナラナイカラ残ス個数ハ $k-1$ 回デ見出シ得ル個数デナクテハナラナイ。

1回デ見出シ得ルノハ 2個以内ノトキデアルカラ

$$l \leqq 3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots\cdots+3+2=\frac{3^k+1}{2}$$

ナルコトヲ要スル.

[(2.2)ノ証明]

(1.2)ノ結果ヲ考ヘレバ上ノ証明デ現ハレタ個数デ十分デアルコトハ明ラカデアル.(勿論コノ結果. 異常ノ球ガ特ニ重イカ軽イカガ判定出来ルワケデハナイ)

§3 始メノ問題ノ考察

" $l \leqq \frac{3^k-1}{2}$ ガ必要且十分デアル.

最初ハカル個数 x ハ $x=3^{k-1}$ (=奇数) トスルコト正常ノ球ノ用意ガナイカラ出来ナイ. 従ツテ $x \leqq 3^{k-1}-1$ トシナケレバナラナイ. ヨツテ(2.1)ニヨリ $l \leqq \frac{3^k+1}{2}-1=\frac{3^k-1}{2}$ ナルコトヲ要ス.

次ニ $l \leqq \frac{3^k-1}{2}$ ナラバ x ハ $3^{k-1}-1$ 以下デ偶数ナルゴトクトリ

$1 \leqq l-x \leqq \frac{3^{k-1}+1}{2}$ トスルコトハ可能デアル.

第一回ニ不等式ガ得ラレレバ残シタモノハ正常デアルカラ コレヲ用ヰテ見出スコトガ出来ル.

第一回ニ釣合ヘバ ソレハ正常ノ球バカリトイフコトガワカルカラ $\frac{3^{k-1}+1}{3}$ 個以内ノ残シタモノカラ見出サレタ正常ノ球ヲ用ヒテ. 異常ノ球ヲ見出スコトガ出来ル

§4. 変形サレタ二ツノ問題ニツイテ.

(1) "始メノ問題ニ於テ異常ノ球ガ果シテ重カツタカ軽カツタカヲ確認セヨ" トイフノニスルト 次ノコトガ言ヒ得ル.

" $l \leqq \frac{3^k-3}{2}$ ガ必要且十分デアル"

(証明) 不等式ガ得ラレテ見出シタトキニハ明ラカニ 重カツタカ軽カツタガ確認出来ル. 従ツテ残ス個数ノミガ問題ニナル. 前ニハ順次天秤ガ釣合ツテヰタトキニハ最後ノ一歩手前デ2個残シテヨカツタ. 然ルニソレデハ此ノトキ最後ニモ釣合ツタトキニハ残シタ1個ハ異常デアルコトハワカツテモ重カツタカ軽カツタカノ確認ハ出来ナイ. シカシ最後ノ一歩手前デ1個残スダケナラバ最後ニ残ラナイカラ重カツタカ軽カツタカノ確認ガ出来ル.

ヨツテ前ヨリ1個少イコトガ必要且十分デアル。

(2) "ℓ個ノ球ガアッテソノウチニ重サノ異ナルモノハアッタトシテモ高々一個デアルトイフ。コノトキコノℓ個ヲ重サニヨル判別スルノニ前ト同様ナ操作ニヨツテ行フトスル 操作ノ回数kトℓトノ関係ヲ求ム"

トイフノヲ考ヘテ見ル

コノトキモ一旦不等式ナ図ラレレバ全ク前ト同様デアル、ヨツテ(1)ト同様 $\ell \leqq \frac{3^k-3}{2}$ ガ必要十分デアル。

〔附記〕

始メノ問題ニ於テ異常ノ球ノ重イカ軽イカノ始メカラ分ツテヰルトシタトキ問題トコノ問題トノ関係ニツイテ一言シテ オキマス。

コノトキハ直ク容易ニ分ルヤウニ "$\ell \leqq 3^k$" デアリマスガ, コレハ球全部ノ集合ヲAトスル トキA>空集合又ハA<空集合ガ始メカラ与ヘラレタ特別ノ場合トシテ考ヘルコトガ出来ル. ソシテ此ノトキ 1個モ正常ノ球ガ與ヘラレテヰナクテモ 十分ナルコトハ(2,2)ノ証明ニ於テABノ分割何レニ於テモ少クトモ 1ヶ所等号ガ成立スルカラ. シイ個数ノ球デ重サヲ述ベレバヨイトイフコトニヨル.

—以上—