89. 共通集合の測度

(阪大) 安西 廣忠

(1943. 2. 27)

空間Ω上のnormalized measureをmとする $m(\Omega)=1$

Ωの中に無限個の集合 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n \cdots$ が与へられていて $m(A_n)=\alpha$ $n=1,2,\cdots$ $0<\alpha<1$ なるとき任意の自然数pと実数$\varepsilon>0$に対して 上記の集合の中から適当にp個 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots A_{i_p}$ を選ぶとその共通部分のmeasureが$\alpha^p-\varepsilon$より大きくなる

$$m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_p})>\alpha^p-\varepsilon$$

これは角谷さんから提出せられた問題であるがHölderの不等式を使ふと簡単に証明出来る。

集合A_kのcharacteristic functionを$\varphi_k(x)$とする。 $k=1,2,\cdots$

Hölderの不等式により

$$\int(\varphi_1(x)+\cdots\cdots+\varphi_n(x))^p dx \geqq \left\{\int(\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_n(x))dx\right\}^p=$$

$$\left(\sum_k\int\varphi_k(x)dx\right)^p=n^p\alpha^p$$

$1\leqq i_1, i_2 \cdots i_p \leqq n$ なるp個のindexのsystemのうち、すべてのindexが相異なるsystemの集りをΓ その残りをΓ'とする。

$$(\varphi_1+\varphi_2+\cdots\cdots+\varphi_n)^p=\sum_{(i_1\cdots i_p)\in\Gamma}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_p}+\sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in\Gamma'}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_p}$$

Γの個数は $p!\binom{n}{p}=n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)$

Γ'の個数は $n^p-n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)<p^2n^{p-1}$ である。

もしすべての$(i_1, i_2, \cdots i_p)\in\Gamma$に対して

$m(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_p})\leqq\alpha^p-\varepsilon$ とすれば

$$\int\sum_{(i_1,\cdots i_p)\in\Gamma}\varphi_{i_1}(x)\varphi_{i_2}(x)\cdots\varphi_{i_p}(x)\,dx \leqq n(n-1)\cdots(n-p+1)(\alpha^p-\varepsilon)$$

$$\int\sum_{(i_1,\cdots i_p)\in\Gamma'}\varphi_{i_1}(x)\cdots\varphi_{i_p}(x)\,dx = p^2n^{p-2}$$ であるから

$n(n-1)\cdots(n-p+1)(\alpha^p-\varepsilon)+p^2n^{p-1}\geqq n^p\alpha^p$ でなければならぬ

$$p^2n^{p-1}>\varepsilon\, n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)$$

pに対してnが充分大きいとき之は成立しない。

更に p と ε が與へられた時、どれ位大きなnを取れば $n \geqq i_k$, $k=1,2\cdots p$ が存在して $m(A_{i_1}\cap\cdots\cdots\cap A_{i_p}) > \alpha^p-\varepsilon$ となるかといふことも前の式から明かである。又 $m(A_{i_1}\cap\cdots\cdots\cap A_{i_p}) > \alpha^p-\varepsilon$ となる $(i_1,\cdots i_p)$ が表はれる。lower frequency も同様に計算出する。

〔附記〕名大の伊藤さんにこの問題の話をした所、上記と同様の回答を寄せられた。