90 多価群Dの正則表現に就いて

阪大学生 内海 勇蔵

(1948. II. 24)

群を其の部分群で例へば左分解した時、出来た剰余類の間に元の意味で乗法を定義しますと、其等の類の全体は群の普通の公理から積の一意性の要求だけを除いた公理を満足する所謂多価群を作りますが 斯かる方法で得られる多価群をKrasnerに従つて多価群Dとよぶことにしますと、一般な多価群が多価群Dなる為の條件を多価群の言葉で述べておくことは、多価群論と群論とを結び付ける上から意義的である様に思はれますが、Eatonが彼の所謂cogroupの公理を必要條件として挙げてゐる以外には、Krasner等も未成功の様に見はれます。茲では丁度Baerが混群に就いてやつたと同様なやり方でCayleyの定理（群の正則表現に関する）を多価群の場合に拡張することに依り、條件」の一つの形を得たいと思ひます。

群$\mathfrak{G}$の部分群$\mathfrak{H}$が$\mathfrak{G}$の自明でない正規部分群を含まないとして、$\mathfrak{G}$の$\mathfrak{H}$による左分解による多価群Dを$\mathfrak{M}$とし、$\mathfrak{G}$の$\mathfrak{H}$による置換表現$\begin{pmatrix}\mathfrak{H}a_i\\ \mathfrak{H}a_i x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{H}a_i\\ \mathfrak{H}a_{p_i}\end{pmatrix}$に対応する$\mathfrak{M}$の元の置換$\begin{pmatrix}m_i\\ m_{p_i}\end{pmatrix}=\varphi$の全体を$\Phi$とおき、特に$\mathfrak{M}$の単位元$e$を$m_i$に移すものの全体を$\Phi_i$と書けば Φは明かに

(1) $\varphi\in\Phi,\ m_i < m_j m_k \rightarrow m_i^{\varphi} < m_j m_k^{\varphi}$

(2) $m_i < m_j m_k \rightarrow \exists\varphi\in\Phi_k : m_j^{\varphi} = m_i$

なる2性質をもち、勿論$\mathfrak{G}\cong\Phi$、全じ対応で$\mathfrak{H}\cong\Phi_0$ 従つて$\mathfrak{M}$は左分解$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$と

Φ/Φ_0（多価群として）ですが、逆に多価群D $\mathfrak{M}$ の元の写像全体の作る半群の部分群 Φ で (1), (2) を満足するものをとれば $\Phi/\Phi_0 \cong \mathfrak{M}$ で、Φ_0 は Φ の正規部分群を含まない事を容易に知ります。即ち $m_i \subset m_i$ に (2) を用ひて $\exists \varphi \in \Phi_i$, $\therefore \Phi_i \neq \phi$.

今 Φ_i と m_i を対応させれば $\Phi_i \Phi_j \supset \Phi_k$ の時 $\exists \varphi_i \varphi_j = \varphi_k (\varphi_\nu \in \Phi_\nu)$ で $m_k = e^{\varphi_k} = e^{\varphi_i \varphi_j} = m_i^{\varphi_j} < m_i e^{\varphi_j} (\because m_i < m_i e) = m_i m_j$ ですが逆に $m_i m_j \supset m_k$ ならば (2) から $\exists \varphi_j \in \Phi_j : m_i^{\varphi_j} = m_k$ ですから $e^{\Phi_i \varphi_j} = m_i^{\varphi_j} = m_k$, $\Phi_i \varphi_j < \Phi_k$, $\Phi_i \Phi_j \supset \Phi_j$ です。

この多価群Dの正則系の剰余類の性質を前提として次の如き定義が可能になります

定義　集合 $\mathfrak{M}$ に多価乗法 $m m' = \{m''\}$ が、あらゆる $\mathfrak{M}$ の2元 m, m' に対し

$\{m\} \neq \phi$ なる如く与へられてゐて、

(3)　$\exists e \in \mathfrak{M} :\ me \supset m \subset me.\ (\forall m \in \mathfrak{M})$

(4)　$c \subset ab$, $a \neq c$ なる任意の3元 a, b, c に対し $\mathfrak{M}$ の $\mathfrak{M}$ の上の一々対応 φ で $m^{\varphi} < mb\ (\forall m \in \mathfrak{M})$, $a^{\varphi} = c$

$$m_i m_j \supset m_k \rightleftarrows m_i m_j^{\varphi} \supset m_k^{\varphi} \qquad (5)$$

を満足するものが有る。

なる2条件が満足されてゐる時 $\mathfrak{M}$ を多価群Dと云ふ。

一般に $\{x \mid a \supset b\} = b/a$ とかけば $m_i/m_j = m_i^{\varphi}/m_j^{\varphi}\ (\forall m_i, m_j \in \mathfrak{M})$ とも書けます。

実は上の証明では Φ の条件 (1), (2) を次の

(1)　$m_i < m_j e \quad \varphi \in \Phi \rightarrow m_i^{\varphi} \subset m_j e^{\varphi}$

及 (2) の形でしか使って居ませんが (1) を満足する φ の全体 Σ は勿論群をなすと限らず、多価群としては (1) を満足する φ の全体 Φ が Δ の最大部分群になってゐる訳けです。

条件 (4) は幾つかのより簡単な条件に分けられる可きものと思はれますが、今の処成果を持ち合はせませんので皆様の御教示を得度く紙面をかりた譯けであります。尚 cogroup が多価群Dであるかどうか、あると云ふ Eaton の予想は正しいと

思はれますがこれも未解決の問題です。

多価群の$\mathfrak{M}$の対称群Σに於ける上述の正則表現に於て $\mathfrak{M}$の合同群AはΣの部分群ですが、$A \cap \Sigma_1$はAの正規部分群で、これはeを固定するΣの元の全体Σ_1と一致します。$\mathfrak{M}$の2元a, bを$ae = be$なる時に（Eatonに従って）e-共軛といへば、e-共軛なる元を一括して得られる類の全体は再び多価群$\overline{\mathfrak{M}}$を作りますが$\overline{\mathfrak{M}}$の合同写像の中Aの元から惹き起こされるものの全体が丁度A/Σ_1と同型です。Σ_1のΣに於ける正規化群をN_{Σ_1}とかけば、$\overline{\mathfrak{M}}$の合同写像αから惹き起こされるAの元xの全体は即ち$A \cap N_{\Sigma_1}$で$a^{\alpha} = x^{-1} a x$.

Eatonは別の論文で多価準群の行列による正則表現に触れて居りますが、其処で行列の係数はBoole束、行列間の乗法は通常の定義に於ける$+, \cdot$を$\cup, \cap$で置き換へた形で定義されてゐる様です。Dresher-Oreでは係数を整数にとって居りますが、あれでは彼等の意味の多価群を表現するのには具合が悪いのではないでせうか。尤もWallの意味の多価群ならば差支へない訳です。Eatonの正則表現で係数として現れるBoole束の元は1と0だけですが、2元束Bを基礎にとった行列は寧ろ多価写像の別名で、例へば多価群$\mathfrak{M}$の左正則表現の正規化群に含まれる正則元の全体が上記Σなることを知ります。

引用文献

M. Krasner Duke M.J. 6: 120–40 (1940)

J.E. Eaton Duke M.J. 6, 101–7 (1940)

M. Krasner C.R. Acad. Paris 218. 542–4 (1944) の Math. Rev. (1945) に於ける紹介 (D.C. Murdoch)

R. Baer. S.B Heidelberg Akad. (4) (1928)

J.E. Eaton. Amer. J. 62: 222–32 (1940)

M. Dresher and O. Ore, Amer J. 60 705–33. (1938)

H.S. Wall. Amer. J. 59. 77–98 (1937)

以上