94. 部分群ノ型ガ與ヘラレタ群ニツイテ

(名大) 伊藤　昇 (1943. IV. 8)

コノ方面ノ研究トシテハ既ニG. A. Miller 及ビ H. C. Moreno [1], O. J. Schmidt [2], D. Koriankowsky [3], [6], S. A. Tchounikhin [4], K. Iwasawa [5] 等ガ知ラレテ居リマス。次ニソレ等ノ結果ヲ使ッテ得ラレルコトヲ一二述ベテ見度イト思ヒマス。特ニ定理1ハ[6]ニ述ベラレテ居ル定理ノ一ツノ証明ヲ与ヘルモノデスケレドモ[6]ハ今ノ所 Review ニヨル以外ニ分リマセンノデ或ハ証明ニ重複ガアルカモ知レマセン。

[定義] 有限群 G, ソノ位数ヲ $g=p^{\alpha}n$, $(p,n)=1$ トスル。G ガ指数 p^{α} ノ正規部分群 N ヲ有スル時 G ヲ P-巾零群ト呼ブコトニシマス。ソウスルト G ガ P-巾零群ナラバ ソノ部分群及ビソレニ準同型ナ群ハヤハリ P-巾零群ニナリマス。但シソレラノ群 G' ノ位数ガ P デ割レナイ時ハ $G'=N'$ ト取リマス。

[補題1] ([4]) G ノスベテノ真部分群ガ P-巾零群ナラバ G 自身 P-巾零群ニナル。唯一ノ例外ハ G ノ p, q-Sylow 群 $(p\neq q)$ ノ一ツヲ夫々 S_p, S_q トスル時、$G=S_pS_q$, $G \rhd S_p$, S_q 巡回群ニナル場合デアル。

今スベテノ真部分群ガ巾零群デアル様ナ非巾零群ヲ S-型ノ群ト呼ブコトニシマスト ([2], [4], [5]) 例外ハ S-型ノ群デアルワケデス。

[4]デハ巾零群トシタ場合ニ同ジ結果ガ得ラレルコトヲ示シテ居リマス。

[証明] 1) 正規デナイ場合 ソノ場合ニハヨク知ラレタ Burnside ノ定理ニヨッテ次ノ様ナ p-群 P ガ存在シマス。$N_P \ni A$ ヲ適当ニ取レバ $P\{A\} \supset \{A\}$. 然シ補題1ノ仮定ノ下ニ於テハ コノ事実ハ $P\{A\}=G$ デアルコトヲ示シマス。更ニ A ノ位数ヲ $a=q^{f}m$ トスル時ハ $(a,p)=1$ デスガ、若シ $m>1$ ナラバ補題1ノ仮定ノ下ニ於テハ A^{q^f} 及ビ A^{m} ガ P ト元可換ニナリ、従ッテ又 A ガ P ト元可換ニナリマスカラ、上ノ事実ハ更ニ $a=q^{f}$ ナルコトヲ要求シマス。従ッテ例外ノ場合ヲ除イテハ問題ノ群ハスベテ P-正規デアリマス。即チコノ場合ニハ補題1ハ証明サレマシタ。

2) P-正規デアル場合。コノ場合ニハヨク知ラレタ Grün ノ定理ニヨッテア

ルp-Sylow群ノ中心ヲZ_p、ソノGニ於ケル正規化群ヲN_{Z_p}、G及ビN_{Z_p}ノp-交換子群ヲ夫々$G'(p)$, $N_{Z_p}(p)$トスル時 $G/G'(p) \cong N_{Z_p}/N_{Z_p}(p)$ $G \neq N_{Z_p}$トスルト補題1ノ仮定カラ$N_{Z_p} \neq N_{Z_p}(p)$ ノノ場合ニハ補題1ハ容易ニ証明サレマスカラ$G = N_{Z_p}$トシマス。ソコデGノ位数ニツイテノ*induction*ヲ行ヘバG/Z_pニツイテハ補題1ガ成立シマス。ソノ時G/Z_pガp-中零群ニナレバ$Z_p = S_p$ナル場合ヲ除イテハ G自身モp-中零群ニナルコトハ見易イ、又G/Z_pガ例外ノ場合ニナレバヤハリG自身モ例外ノ場合ニナルコトモ容易ニ分リマス。従ッテ残リハ$Z_p = S_p$即チS_pガGノAbel正規部分群ナル場合デアリマス。ソコデ今$g = p^e q^f r^g \cdots$ト仮定シマストS_pS_q S_pS_r …モGトナリ補題1ノ仮定ノ下ニ於テハS_pハS_q, S_r, …ト元可換ニナリ結局$n = \frac{g}{p^e}$ナル位数ノ部分群ヲNトスレバ(ソノ存在ハ*Schur*ノ定理ニヨル H. *Zassenhaus*ノ教科書参照) GハNトナリマス。ソウスルト$g = p^e q^f$ナル場合ダケニナリマスガ、ソノ場合モq-*Sylow*群ガ巡回群デナケレバ、ヤハリGガp-中零群ニナルコトハ明白デアリマス。即チコノ場合ニモ補題1ハ証明サレマシタ。

カクテ補題1ハ完全ニ証明サレマシタ。

サテGノ部分群ヲスベテ考ヘ、互ニ同型ナモノヲ一ツノ類ニ集メレバGノ部分群ハ同型類ニワカタレマス。ソノ時G及ビ$\{e\}$ガ夫自身夫々一ツノ類ヲナスコトハ明白デスガ、コノ二ツヲ除イタ同型類ヲ本質的ナ同型類ト呼ブコトニ致シマス。更ニ各同型類ヲ組成スル部分群ガ例ヘバ中零群ナルカ非中零群ナルカニ従ヒ、ソレラノ同型類ヲ又中零類、非中零類ト呼ブコトニシマス。

[定理1] ([6]) <u>非可解群Gソノ位数ヲ$g = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$トスレバ$G$ハ少クトモ$n$個ノ本質的ナ非中零類ヲ含ム。</u>

[証明] コレモヨク知ラレタ*Burnside*ノ定理カラ$n \leqq 2$ナル時ハGハ可解群ニナリマスカラ定理1ノ仮定ノ下ニ於テハ$n \geqq 3$トナリマス。
ソコデ此ノ定理1ヲ単純群Gニツイテ証明シマス。サテ任意ノp_iニ対シテGノスベテノ真部分群ガp_i-中零群デアルト仮定シマスト$n \geqq 3$ナルコトカラ補題1ニヨリGハ指数ガ$p_i^{e_i}$ナル正規部分群ヲ有スルコトニナリマス。ソノ様ナコトハ不可能デスカラ、Gニハ少クトモ一ツp_i-中零群デナイ様ナ真部分群ガ存在スルコトニ

ナリマス. 従ッテソノ様ナ部分群ノウチニ位数極小ナモノガ存在シマスカラ、ソレ…ニ注目スレバ、ソレハ補題1ノ例外ノ群ニナリマス. ソレヲ G_i ト致シマス. 各 G_i ガ同型デナイコトハ明白デスカラコレデ定理1ハ単純群ノ場合ニハ証明サレマシタ. コレデ G_i ガ S-型ノ群ナルコト明白デアリマセウ.

サテ定理1ノ対偶ヲ考ヘマスト 位数 $g = p_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n}$ ノ群Gガ高々 $n-1$ 個シカ本質的ナ非巾零項ヲ含マナケレバGハ可解群デアルト言フコトニナリマスガ, 上記証明ニヨレバGガ非単純デアルコトハ証明サレタワケデス. デスカラ induction ヲ使ッテGガ更ニ可解群デアルコトヲ証明シマス. ソウスレバ定理1ハ完全ニ証明サレタコトニナリマス. 今アル p_i ニツイテGノスベテノ真部分群ガ p_i-巾零群デアル場合ニツイテ考ヘレバヨイコトハ上記証明ニヨリ明白デスカラ. ソレヲ仮定シマスト、ソノ場合Gハ指数ガ $p_i^{e_i}$ ナル正規部分群Nヲ含ミマス. Nノ位数ハ $n = p_1^{e_1}\cdots p_{i-1}^{e_{i-1}}\, p_{i+1}^{e_{i+1}}\cdots$ デアリマスカラ Nガ巾零群デナケレバ定理1ノ仮定カラNハ本質的ナ非巾零項ヲ高々 $n-2$ 個シカ含マヌコトニナリ induction ノ仮定カラNハ可解群ニナリマス. Nガ巾零群ナラバ、ソレハ勿論可解群デスカラ. 結局何レニシテモNハ可解群ニナリ 従ッテG自身可解群ニナリマス.

コレデ定理1ハ完全ニ証明サレマシタ.

[補題2]([3]) 有限群G, pヲGノ位数ヲ割ル一ツノ素因数. S_p ヲ一ツノ p-Sylow 群 S_p' ヲソノ交換子群ト致シマス. 今Gガ本質的ナ非p-巾零類ヲ高々一ツシカ含マナイナラバ Gハ非単純デアル. 但シ S_p/S_p' ハ $(p,\cdots,p)$ 型 Abel 群デハナイトスル.

[3]ニ於テハ補題2ノp-巾零ヨリ強ク巾零トシ、ソノ代リニ S_p ニ関スル仮定ヲ除イタ定理ガ証明サレテ居リマス.

証明 1) p-正規ナル場合. ソノ場合ニハ補題1証明2)ニ於ケル記号ヲソノママ使ヘバ又 $G/G'(p) \cong N_{Z_p}/N_{Z_p}'(p)$ ココデ $N_{Z_p} = G$ ナラバソレハ即チ Z_p ガGノ正規部分群デアルト言フコトデアリマスカラ補題2ハ証明サレタコトニナリマス. 故ニ以下 $N_{Z_p} \neq G$ デアルト仮定シマス. ソノ時 N_{Z_p} ガ p-巾零群デアレバ $N_{Z_p} \neq N_{Z_p}'(p)$ ソウスレバ又 $G \neq G'(p)$ ココデ $G'(p) = \{e\}$ ナラバGハp-群トナリ其上Gガ然カモ単純群ナラバ、ソレハ位数pノ巡回群ニナリマスカラ結局

$S_p/S_p' = S_p = G$ ハ p-型 Abel-群デ補題2ノ仮定ニ反シマス. 即チコノ場合ニハ補題2ハ証明サレタコトニナリマス. 故ニ以下 $G'(P) \neq \{e\}$ デアルト仮定致シマス. ソウスルト $G'(P)$ ハ G, G, $\{e\}$ ト異ナル正規部分群トナリ, 補題2ハ証明サレタコトニナリマス. ソウスルト残リ $N_{Zp} = N_{Zp}(P)$ 即チ N_{Zp} ガ非 p-巾零群ナル場合デアリマス. ソウスルト補題2ノ仮定カラ N_{Zp} ノ真部分群ハスベテ p-巾零デアルコトニナリマスカラ 補題1ニヨレバ N_{Zp} ハ S-型ノ群デナケレバナリマセン. 然ルニ K. Iwasawa [5] 及ビ G.A. Miller 及ビ H.C. Moreno [1] ニヨレバソノ時 ($N_{Zp} \supseteq S_p$) S_p/S_p' ハ $(p, \cdots, p)$ 型 Abel群ニナリマスカラ定理2ノ仮定ニ反シマス. 即チ補題2ノ仮定ノ下ニ於テハ N_{Zp} ハ P-巾零群デアリ. 結局コノ場合補題2ハ証明サレタコトニナル.

2) P-正規デナイ場合. コノ場合ニハ補題1証明1)ニ於ケル如ク $N_p \ni A$ ヲ適当ニ取レバ $P\{A\}$ $\{A\}$ $(a.p)=1$ ナル様ナ P-群 P ガ存在スルワケデスガ 補題2ノ仮定ノ下ニ於テハ $N_p = G$ カ $N_p = P\{A\}$ カデナケレバナリマセン. 前者ノ場合ハ P カ G ノ正規部分群デアリ. 従ッテ定理ノ成立ハ明白デアリマスカラ以下 $N_p = P\{A\}$ デアルト仮定シマス. ソウスルトコノコトカラ更ニ $P = S_p$ デナケレバナラヌコトハ容易ニ分リマス 然ルニ補題2ノ仮定ノ下ニ於テハ N_p ノ真部分群ハスベテ P-巾零群デアリマスカラ補題1カラ N_p ハ例外ノ場合. 即チ N_p ハ S 型ノ群デアルト言ウコトニナリマス. ソウスルト又, K. Iwasawa [5], G.A. Miller 及ビ H.C. Moreno [1] ニヨレバ S_p/S_p' ハ $(p, \cdots, p)$ 型ノ Abel群ニナリマスガ. ソレハ補題2ノ仮定ノ下ニ於テハ不可能デス. 即チコノ場合ニモ補題2ハ証明サレマシタ.

カクテ補題2ハ完全ニ証明サレマシタ.

定理1 補題2カラ直チニ次ノ定理ガ得ラレマス.

[定理2] 有限群 G, ソノ位数ヲ $g = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ 更ニアル p_i ニ対シテ S_{p_i}/S_{p_i}' ガ $(p_i \cdots p_i)$ 型 Abel群デナイト致シマス. ソウスルト G ハ少クトモ $n+1$ 個ノ本質的ナ非巾零項ヲ含ミマス. 以上

文献

[1] G.A Miller–H.C. Moreno; Trans. A.M.S. 4. pp 398–404 (1903)

[2] O.J. Schmidt : Rec. math. 31 B-4 PP 566-572 (1924)
[3] D. Kolinskowsky ; C R. URSS. N.S 19. pp 343-345 (1938)
[4] S.A Tchounikhin ; Rec math. T.4 (46) N.3 (1933)
[5] K. Iwasawa ; Proc Phy-Mat. Soc. 23. PP 1-4 (1941)
[6] D. Koliankowsky : Rec. math. N. s 19 (61) PP 429-437 (1946)