97. *Nevanlinna* の定理について

京都工専　吉田徳之助 (1948.4.30)

函数論では古典的な *Liouville* の定理として．有限な凡ての点で正則な函数の絶対値が一定数を超えなければ，その函数は常数であることが知られてゐる．これを R. Nevanlinna は調和測度の理論から擴張した．調和測度零なる集合に屬する点を除いて凡ての点で一價解析的な函数が調和測度正なる集合に屬する値をとらないならば，その函数は常数である．換言すれば取除きの調和測度零なる集合に於ても一價解析的であるといふのである．

このことは調和測度零なる点集合の近傍で一價解析的な函数についても成立する．これはすでに亀谷氏によつて指摘されたところである．氏は一次測度零なる集合の近傍で一價解析的な函数の値分布に関する *Besicovitch* の定理を用ひてなされた．こゝでは Nevanlinna の調和測度の理論だけから證明しえることを述べたい．

調和測度零なる集合 α に屬する点を除いて α の近傍で一價解析的な函数 $w(z)$ が調和測度正なる集合に屬する値をとらないならば，その函数は α に於ても一價解析的である．

證　α の近傍で α を囲む單一閉曲線 C の囲む範囲を G とする．函数 $w=w(z)$ による閉曲線 C の像 L は w-平面を有限個の範囲に分ける．$\bar{G}-\alpha$ で $w(z)$ がとらない値の集合 β は調和測度正である．調和測度零なる集合の有限個の和集合の調和測度は零であるから L にて分たれる有限箇の範囲のうちには調和測度正なる β の閉部分集合 β' を含む範囲 D が少くとも一つある．

函数 $w(z)$ の値を D の内部の値とならしめない点 z の凡てからなる集合を Δ とする．$G-\Delta$ が空集合でないとすれば　それは開集合であるから連結せる範囲 G' を含む．この場合函数 $w(z)$ は G' にて $D-\beta$ に屬する値をとり　α の点でない G' の境界点では D の境界である L の上の値をとる．β' は調和測度正であるから

$\omega(w-\beta'\ D-\beta')$ は常数でない調和函数である。G' の一点 z_0 の像 $w_0 = w(z_0)$ は $D-\beta'$ の内点となるから $\omega(w_0, \beta', D-\beta') > 0$ また函数 $\omega(w(z), \beta', D-\beta')$ は G' で有界な調和函数である。調和測度零なる集合 α を除く境界点で値零をとるから恒等的に零に等しい。従つて $\omega(w_0, \beta', D-\beta') = \omega(w(z_0), \beta', D-\beta') = 0$. これは不合理である。従つて $G-\Delta$ は空集合である。すなはち $w(z)$ は G で D の値をとらない。従つて D の一つの内点を w_1 とすれば函数 $w_1(z) = \dfrac{1}{w(z)-w_1}$ は G で有界となる。α は調和測度零であるから Nevanlinna の定理によつて $w_1(z)$ は α に於ても一価解析的となる。故に $w(z)$ は α に於ても一価解析的である。

R. Nevanlinna : Eindeutige analytische Funktionen V. §4.

S. Kametani Proc. Imp. Acad. vol 17. No. 10.