

104 不動点定理に就て III.

佐藤 徳意 (九大) (6.3)

次に款語 77 で述べた II) に就て述べよう.

Lemma 1. " R を実数上に開し連続群とする. 集合 A が *Kompakta* ならば A の閉包 \bar{A} も亦 *Kompakta* である."

Lemma 2. " R は次の条件を満足する *linia L^* -space* とする. $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ならば, $x_n + y_n \rightarrow x + y$, $\lambda x_n \rightarrow \lambda x$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) とする. A が R の *konvekisa* な集合ならば A の閉包 \bar{A} も亦 *konvekisa* である."

前談話で述べた不動点定理と Lemma 1, 2 により直ちに次の不動点定理を得る.

定理 1 " R を *linia metrika space* とする. K を R に於ける閉じた凸集合, $y = f(x)$ は K で定義された連続写像とし, $f(K)$ は *Kompakta* とする.

R が $f(K)$ の開若 $\bar{f}(K)$ が *lokale preskau konvekcia* ならば
 必ずしも一つの不動点

$$x = f(x) \quad x \in f(K)$$

が存在する。”

系 “ R を *linia metrica spaco* とする。

K を R に於ける開若た凸集合, $y = f(x)$ は K で定義された連続写像と $f(K)$ は *kompakta* とする。 R が K で *lokale preskau konvekcia* ならば必ずしも一つの不動点

$$x = f(x) \quad x \in f(K)$$

が存在する。”

\mathcal{F} を m 次元 *Euklid-a spaco* に於ける領域 D で定義された連続写像(系)の族とする。然るときは次のやうな有界閉領域 $\{D_\nu\}$ をとることが出来る:

$$D_\nu \subset D_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} D_\nu = D.$$

$f(x), g(x) \in \mathcal{F}$ の距離を

$$(1) \quad \|f(x) - g(x)\| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{\delta_\nu}{1 + \delta_\nu}$$

で定義する。茲に

$$\delta_\nu = \max_{x \in D_\nu} |f(x) - g(x)|$$

これから次の定理を得る。

定理 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$ は函数列 $\{f_n(x)\}$ が函数 $f(x)$ に領域 D で広義の一様収束することと *ekvivalenta* である。

\mathcal{F} が (1) に依つて *metrica* されたとき \mathcal{F} -*spaco* と云ふ。

定理 3. “ \mathcal{F} -*spaco* は *linia metrica kaj kompakta spaco* である。”

領域 D での広義の一様収束性を以て函数(系)族 \mathcal{F} に *topologie* を入れると、 \mathcal{F} は *linia topologica spaco* をなすことは容易に分る。これを簡單に L^* -*space* と云ふ。と次の系を得る。

系 “ L^* -*space* は \mathcal{F} -*spaco* に *linie homeomorfa* である。”

定理 4. “ \mathcal{F}_0 は領域 D での

$$|f(x)| \leq G$$

なる連続函数(系) $f(x)$ の族とする. 然るときは

$$\|\lambda f(x)\| \leq |\lambda| \|f(x)\|, \quad |\lambda| \leq 1$$

である. 茲に ρ は常数と $\rho = 1 + G$ ととることが出来る.

定理 1 系及び定理 2-4 に依り次の函数(系) の族に同する定理を得る.

定理 5. “ \mathcal{F} を領域 D で定義された連続且つ一様有界な函数(系) の族とする.

変換.

$$F(x) = \overline{\mathcal{F}}(f(x)), \quad f(x) \in \mathcal{F}$$

は $f_0(x)$ に D で広義の一様収斂する函数列 $\{f_n(x)\}$ に對し.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{F}}(f_n(x)) = \overline{\mathcal{F}}(f_0(x))$$

が成立する.

$\overline{\mathcal{F}}$ で函数(系)族 $\{\overline{f}(x)\}$ を表すとき $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ 且つ $\overline{\mathcal{F}}$ は D で同程度連続ならば

$$f(x) = \overline{\mathcal{F}}(f(x)) \quad f(x) \in \overline{\mathcal{F}}$$

なる $f(x)$ が存在する.”

この定理は表面に抽象空間に於ける概念を用ひて表現して居ないが応用の際極めて便利で. 例へば常微分方程式論に於ける古典的な Heano の存在定理は 7-8 行で証明出来る.

定理 5 は連続函数族に関する定理であるが Borel 集合に於て定義された加法的集合函数族に對しても全く同様な定理を得る.