112. $\mathfrak{p}$進体ニオケルn巾根ニツイテ

東北大　増田勝彦

類体論ヲ高木先生ノ御本ノヨウニクミタテル時ニ$\mathfrak{p}$進体ノ理論カラ次ノ定理ヲ用イマス。

〔定理〕 $K_{\mathfrak{p}}$ニオイテ自然数nニ対シテ適当ナ限界以上ニλヲトレバ$K_{\mathfrak{p}}$ニ於テ$a \equiv 1 \ (\mathfrak{p}^{\lambda})$ナル$a$ハ$n$乗巾デアル。$p^{r} \| n$，$\mathfrak{p}^{e} \| p$トス

レバ、

$$\lambda > \frac{c}{p-1} + e\gamma \text{ デヨイ.}$$

コレヲ初等的ニ一次ノ合同式ノ解法ノミデミチビキマス.（中山先生ノ局所類体論（岩波）ニモ $\log$ ヲツカハナイ證明ガアリマスガ λ ノ限界ガ上トチガイマス）事実ハ簡単ナコトデスガ計算ガワリニ長クナリマスカラカキトメテオイテモヨイカトオモイマシタ.

證明

i) $\gamma=0$ ノ時 $m=m_0$

今数列 x_i ヲ $x_1=1$

$$x_{i+1}=x_i+b_i\varpi^{\beta_i} \text{ デ定メル.}$$

但シ b_i ハ第二 $\bmod \mathfrak{p}$ デ定メタ代表系カラ. ϖ ハ $\mathfrak{p}$ ノ一乗デ丁度ワレル数 β_i ハ integer デ $\varpi^{\beta_i}//a-x_i^m$

$$b_i \text{ ハ} (x_i+b_i\varpi^{\beta_i})^m \equiv a \quad \bmod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$$

デ定メル. カカル β_i b_i ガ存在スレバ.

$$\beta_{i+1} \geqq \beta_i+1 > \beta_i \text{ デ } x_i \to x \ (i\to\infty)$$

カツ $x^m=a$ トナル. トコロデ

$$(x_i+b_i\varpi^{\beta_i})^m = x_i^m + m x_i^{m-1} b_i\varpi^{\beta_i} + \frac{m(m-1)}{2!} x_i^{m-2} b_i\varpi^{2\beta_i} + \cdots\cdots$$

$$2\beta_i \geqq \beta_i \quad \text{ト } x_i = 1+b_1\varpi^{\beta_1}+\cdots\cdots$$

カラ

$$\equiv x_i^m + m(1+b_1\varpi^{\beta_1}+\cdots\cdots)b_i\varpi^{\beta_i} \quad \bmod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$$

$$\equiv x_i^m + m b_i \varpi^{\beta_i} \quad \bmod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$$

故ニ $a-x_i^m \equiv m b_i \varpi^{\beta_i} \quad \bmod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$ デ b_i ヲ定メレバヨイ

カ $(m, p)=1$ 及ビ $\mathfrak{p}^{\beta_i}//a-x_i^m$ カラコノ b_i ノ存在ハ明

ii) $m=m_0p^\gamma$ ノ時 $(\gamma>0)$

$\lambda > \frac{e}{p-1} + e\gamma$ デヨイコト (x)

$a \equiv 1 \quad \bmod \mathfrak{p}^\lambda$ トスル

マヅ $y^{m_0}=a$ ヲトク i) ニヨリトケルツクリ方カラ $y=1+b_1\varpi^{\beta_1'}+\cdots$ デ $\beta_1=\lambda$ 故ニ $y\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^\lambda$ デ

$Y = x^{p^r}$ ヲトケバヨイ. コレヲ

$Y = X_1^p \quad X_1 = X_2^p \; \cdots\cdots \; X_{r-1} = X_r^p$

トシテ求メテユケルコトヲ示ス.（(2)ノ仮定ノ下デ）

マヅ $Y = X^p$ ガ $\lambda > \frac{e}{p-1} + \epsilon \; \cdots\cdots (3)$

デ $Y \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^\lambda$ ナラトケルコトヲ示ス

$x_1 = 1$ トシテ $\quad X_{i+1} = X_i + b_i \varpi^{\beta_i}$

トシ $\quad \beta_i = \beta_i' - e$ 但シ

β_i' ハ $\mathfrak{p}^{\beta_i} /\!/ Ya - x_i^p$

b_i ハ $(x_i + b_i \varpi^{\beta_i})^p \equiv a \mod \mathfrak{p}^{\beta_i'+1}$

ニヨリ定メル. 又 b_i ノ存在サエイエレバ.（i）ト同様ニ $X^p = Y$ ガトケル.

$X_1, \cdots\cdots X_i$ ガエラレタトスル.

$X_{i+1} = X_i + b_i \varpi^{\beta_i} \qquad \beta_i = \beta_0' - e$

デ β_i' ハ $\mathfrak{p}^{\beta_i'} /\!/ Y - X_r^p$ トス（注 $\beta_1' = \lambda$）

$(X_i + b_i \varpi^{\beta_i})^p = X_i^p + p b_i \varpi^{\beta_i} x_i^{p-1}$

$+ \frac{p(p-1)}{2!} b_i^2 \varpi^{2\beta_i} x_i^{p-2} + \cdots + b_i^p \varpi^{p\beta_i}$

$p /\!/ \frac{p(p-1)\cdots\cdots(p-i+1)}{i!} \qquad$ 但シ $i \neq 0 \; p$

又 $j \geqq 2$ ノ integer ニツキ $j\beta_i + \epsilon \geqq 2\beta_i + e > \beta_i + \epsilon = \beta_i$

$(\mathfrak{p}^e /\!/ p)$

又 $X_i = 1 + b_1 \varpi^{\beta_1} + \cdots\cdots \quad \beta_1 = \lambda - \epsilon > \circ$ ヨリ

$(X_i + b_i \varpi^{\beta_i})^p \equiv X_i^p + p b_i \varpi^{\beta_i} (1 + b_1 \varpi^{\beta_1} + \cdots\cdots)$

$+ b_i^p \varpi^{p\beta_i} \equiv X_i^p + p b_i \varpi^{\beta_i} + b_i^p \varpi^{p\beta_i}$

$\mod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$

今別ニ $p\beta_i > \beta_i'$ ナル不等式ヲ考エテミル.

$\beta_i' - e = \beta_i$ 故 $p\beta_i > \beta_i + e$

コレハ β_i ガ大キイ程ナリタツ式ダカラ.

$\beta_{i+1} \geqq \beta_i + 1 > \beta_i$ カラ

β_1 デ成立スルコトヲイエバ常ニ成立スル.

$\beta_1 = \lambda - e$ デ $\qquad p(\lambda - e) > \lambda$ ハ

$$\lambda > \frac{ep}{p-1} = \frac{e}{p-1} + e = (3)$$

故ニ(3)ノ下デハ $p\beta_i > \beta_i'$ カラ

$$(x_i + b_i \varpi^{\beta_i})^p \equiv x_i^p + p b_i \varpi^{\beta_i} \quad \bmod.\ \mathfrak{p}^{\beta_i'+1}$$

ニヨリ b_i ノ条件ハ

$Y - x_i^p \equiv b_i p \varpi^{\beta_i}$ シカルニ $\mathfrak{p}^e /\!/ p$ ト $\varpi^{\beta_i'} = \varpi^{\beta_i+e} /\!/ a - x_i^p$ ヨリ b_i ハ存在シテキマル.

又 $Y \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^\lambda$ トスルトツクリ方カラ

$x = 1 + b_1 \varpi^{\beta_1} + \cdots$ デ $\beta_1 = \beta_1' - e = \lambda - e$

ヨッテ $Y = x_1^p,\ x_1 = x_2^p \cdots x_{r-1} \equiv x_r^p$

ガ r 回トケルコトヲ保証スルニハ.

$$\lambda - (r-1)e > \frac{e}{p-1} + e$$

即チ $\lambda > \frac{e}{p-1} + re$ デ 十分ナルコトガシレタ. (終)

(仙台 9月 3日)