

113. 群ニツイテノ二三ノ注意

東北大 増田 勝彦

昨年マダ正田先生ノ代数学選論ノデナイコロデシタ。淡中先生ノ御指導デ *Ringtheorem* ト群論トノ關係ヲ學ンテ得タ結果ヲ若干手ヲイレテ以下ニシルシマシタ。

群ト環トヲデキルダケ平衡ニトリアツカツテ *Wedderburn* ノ定理アリマデクミタテヨウトシタノデシタガ環ニツイテハ常ニ環自体トシテ考エタ方ガ簡單ニ証明サレカツ結果モヨクナルノデシタラハ巻略シマス。シタガツテ群ノ方モ興味本位ノモノニシカスキナクナリマシタガ右ノ二カ興味デモアツダラトオモツテカキトメマシタ。誤ガナケレバヨイガト思ツテイマス。

群ノ公理ハ次ノ形ニノベラレテキル。

1) $a \cdot b = c$

$$2.) (a \cdot b)c = a(b \cdot c)$$

3.) スリナクモーツ左単位元が存在スル。コレヲ e トカク。

4.) 各元 $a = a^{-1}a = e$ ナル a^{-1} が存在スル

コレカラ ヨクシラレテルヨウニ e が右単位元デアルコト及ビ唯一ノ単位元ナルコト等ガデテクル。今 3 ノ左ヲ右ニカエテ

3*) スリナクモーツ右=単位元が存在スル。ソノーツヲ e トスル

トシ コノ 3* ト

4*) 各元 $a = a^{-1}a = e$ ナル左 逆元 が少クモーツ存在スル。

1) 2) 3*) 4*) ヲ満足スル空デナイ 集合ヲソノ商ノ関係ヲ含メテ S -群ト名ツケテ、コノ S 群ノ構造ヲシラベル。

注意、右単位元ガ e, e', \dots ノ如クイクツカアルデアラウ。ソレニ対シテ a ノ左逆元が存在シタラ、コレヲ $a_{e'}^{-1}, a_{e''}^{-1}, \dots$ ト表ス。4*デ $a_{e'}^{-1}$ が存在スルカラ任意ノ e' ニツイテ $a_{e'}^{-1}$ ハ存在スル。ソレハ $e'a_{e'}^{-1}$ デアル

$$e'a_{e'}^{-1} a = e' e = e'$$

1. S 群ノ構造

定理 1 S 群 \mathcal{Y} ヲ集合ト考イル時ニハ M トカクコトニスルト

$$M = M_1 + M_2 + \dots \quad (\text{集合トシテノ直和})$$

テ M_i ハ各群ヲナス。ソレニ属スル S 群ノ右単位元ニヨリ一意ニ代表サレ且ニ群トシテ同型デアイル。

即チ各元ニツイテソレヲ含ム群ガキマリ。ソレガ同型ニナル。

定理 2. シタガツテ右単位元ガ唯一ナラバ S 群ハ群ニナル。

定理 3 S 群 \mathcal{Y} 内デ M_i ノナス群(ソレヲ \mathcal{Y} トカ)

\mathcal{Y}_i ハ *Maximal* ナ群デアリ \mathcal{Y} 内ノ *Maximal* ナ群ハ互ニ上ノ集合ノ直和ヘノ分解ニテテクルアル M_j ノ *element* ノナス群デアイル。

證明 1) 右単位元 e ヲトリ $e \in \mathcal{Y}$ 。但シ $x \in \mathcal{Y}$ ノ形ニカケル元全部ノ集合ハ群ヲナス。コレヲ $e \mathcal{Y}$ トカク

$$\therefore ee = e \quad e e \mathcal{Y} \quad e \cdot e x = e x \quad (\text{左単位元})$$

$$e x e^{-1} \cdot e x = e \cdot x e^{-1} x = ee = e \quad (\text{左逆元})$$

$$e x \cdot e x' = e x x' e \in e \mathcal{Y}$$

ii) ニツノ右単位元 e, e' ニツイテ $e \notin e' \mathcal{G}$ ト $e' \notin e \mathcal{G}$ トハ $e = e'$ ノ時ニハ明ニ一致スルガ $e \neq e'$ ナラハ共通元ヲモツナイ。

\therefore 今 $e \mathcal{G} \cap e' \mathcal{G}$ ガ空デナクアル元 x ヲモツタナラ

$$x = ex = e'x \quad x \mathcal{G} = ex \cdot \mathcal{G} = e(ex \cdot e \mathcal{G})$$

$$= e \cdot e \mathcal{G} = e \mathcal{G} \quad \text{又} \quad x \mathcal{G} = e'x \cdot \mathcal{G} = e'(e'x \cdot e' \mathcal{G})$$

$$= e' \cdot e' \mathcal{G} = e' \mathcal{G} \quad \therefore e \mathcal{G} = e' \mathcal{G} \quad \text{シカラバ群トシテノ単位元ノ}$$

唯一性カラ $e = e'$

iii) S 群 \mathcal{G} ノ任意ノ元 x ヲ含ム $e' \mathcal{G}$ ノ形ノ群ガ存在スル。ソレハ $x = e, y$ ノ形ニカケルコトヲシメセバヨイ。今任意ニ一ツ右単位元 \bar{e} ヲトツクル。注意

$\{ \}$ ニヨリ $x_{\bar{e}}^{-1}$ ガ存在スルガ $\bar{e} \mathcal{G}$ ガ群ナルコトヲ用イテ $\bar{e}_2 x_{\bar{e}}^{-1} \cdot \bar{e} x = \bar{e} =$

$$\bar{e} x \cdot \bar{e} x_{\bar{e}}^{-1} = \bar{e} \cdot x x_{\bar{e}}^{-1} \quad \text{サテ } \mathcal{G} \text{ ノ任意ノ元 } a \text{ 対シテ}$$

$$ax \cdot x_{\bar{e}}^{-1} = a \bar{e} \cdot x x_{\bar{e}}^{-1} = a \bar{e} = a$$

$\therefore x x_{\bar{e}}^{-1}$ ハ右単位元 コレヲ e' トカク。

$$x x_{\bar{e}}^{-1} x = e' x = x \cdot x_{\bar{e}}^{-1} x = x \bar{e} = x$$

$$\therefore x \in e' \mathcal{G}$$

ヨツテ定理 1. 2 ガ証明サレタ。

M_i ノ形ハ $e_i \mathcal{G}$ デアルコトヲ考エテ定理 3 ヲ導ク。

今群 H $\cap e \mathcal{G}$ ナラバ 任意ノ $x \in H$ ナル x ニツイテ定理 2 ニヨツテ $x \in e' \mathcal{G}$ ナル e' ガ存在スル。コノ内ノ x ノ逆元ヲトル。コレヲ $x_{e'}^{-1}$ トスル。

$$x \cdot x_{e'}^{-1} = e' = (x \cdot e) x_{e'}^{-1} = x \cdot e x_{e'}^{-1}$$

$$\therefore e' \in x \cdot e \mathcal{G} \subset e' \mathcal{H}$$

$$\therefore e' \in \mathcal{H} \quad \text{群 } \mathcal{H} \text{ ノ右単位元ハ唯一ダカラ } e = e' \quad \therefore x \in e \mathcal{G}$$

$$\therefore \mathcal{H} \subset e \mathcal{G} \quad \therefore \mathcal{H} = e \mathcal{G}$$

次ニ \mathcal{G} 内ニ $\text{Maximal group } K$ ガアルトスル。コレノ単位元ヲ e_1 トスルト $K = e_1, K \subset e_1 \mathcal{G}$ シカシマダ e_1 カ \mathcal{G} ノ右単位ガドウカワカラナイ。タガ e_1 対シテ $e_1 \in e' \mathcal{G}$ ナル e' ガ存在スル。

$\therefore K \subset e_1 \mathcal{G} \subset e' \mathcal{G} \mathcal{G} = e' \mathcal{G}$ 右辺ガ group テ K ガ Maximal ナルコトカラ $K = e' \mathcal{G}$

2. S群ノ存在及どツノ形ノ決定

A) S群ノ実像ニクミタテラレバ 集合 $E = \{\sigma, \tau, \dots\}$ ニツイテ積ヲ $\sigma\tau = \sigma$ テ定ムルト群ヲ得キル。コノ形ノ群ヲE準群トヨフコトニスル。

定理4 右単位元ノナス集合ヨリナルE準群ト群 $e \notin E$ トヲ與エラレタニモツ S群ハ存在シ *isomorphic* ヲ等シトカンガイレバ唯一ニキマル。

$$E = \{\sigma, \tau, \dots\}$$

$$H = \{h, h', \dots\}$$

(σ, h) ナルクミニ積ヲ

$$(\sigma, h)(\sigma', h') = (\sigma\sigma', hh') = (\sigma, hh')$$

トスレバS群ニナリ、ミトムル形ニナツテルコトハ明 以下略

例1. $E = (\sigma, \tau) \quad H = (1, (12))$

	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a
c	c	d	c	d
d	d	c	d	c

例2. $E = (\sigma) \quad H = (1, (12))$ 群ニナル。

	a	b
a	a	b
b	b	a

定理 S群ハ右単位元ノ濃度ト群 $e \notin E$ テ完全ニキマル。

以上テ目的トスル群論ヲ終リマシタ。ステニキヅカレタ通り *Wedderburn* 定理ノ *analogue* テス。コノヲ用イテクミタテテ環論ハ四ニノバテ理ニテハブキマスガ一列ヲアゲマストホホ決ノヨクニモデキマス。

Ring $\Delta = \text{Minimal}$ ナ左イデアル方存在シ ℓ^2 キ0
 シタガツテ $\ell^2 = \ell$ トスル。スルトヨクシラレタ Artin ノ方法デ ℓ 内ニ
 Körper (sle) ガ含マレ且コレガ *Maximal Körper* ナルコト(定理3)
 カイエマス。モシコノ Körper (*Schief Körper*) ニツイテ ℓ ガ有限次ナラユ
 レデ Δ ガ *Matrix* ニ準同型ニナルカラ、サラニモシ Δ ガ *Simpl* ナラ同型ニ表
 示ナレ。

以上 疑其ノ他オキヅキノ点ガアリマシタラオシラセ下サイ。

(仙台 6月4日)