

117. 有界多葉函數の性質について

京都工專 吉田 徳之助 (8.10)

多葉函數についてその性質を導き出すのと同じやうな方法ですれば、有界多葉函數の性質が少しく出せることを述べたい、こゝでは

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots + a_n z^n + \dots$$

なる形の單位円内 $|z| < 1$ で正則、 p 葉且つ有界： $|f(z)| < M^p$ な函數について考える。先ず

$$\sqrt[p]{f(z)} = z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$$

は $|z| < 1(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}}}$ で正則且つ單葉であることを証明する。

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt[p]{f(\frac{1}{z})}} = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots$$

とすると $w(z)$ は $1 < |z| < \infty$ で正則で $|w(z)| > \frac{1}{M}$ 。また $(w(z))^p$ は $|z| > 1$ で p 葉となる。 $\gamma > 1$ とする。 R を十分大にすれば $w = w(z)$ による円 $|z| = R$ の像は單一閉曲線となり円 $|z| = \gamma$ の像をその内部に含むに至る。円 $|z| = R$ の像にて囲まれた領域の面積を $A(R)$ とし、円環 $\gamma < |z| < R$ の内

数 $W = W(z)$ による ζ の Riemann 面上での画面を $A(r, R)$ とすれば、談話 1160 (第260号) と同様は

$$A(r, R) + \pi \left(\frac{1}{M}\right)^2 \leq A(R)$$

が成立することが言へて、これを類推の関係式になおしてから $r \rightarrow 1$ とすれば

を得る。 $|z| > \frac{1}{r(M)}$ なるときは $\frac{1}{(|z|^2 - 1)^2} < \frac{1}{1 - \frac{1}{M^2}}$ 従つて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|z|^{2n+2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{M}}$$

となる。こゝに得た二つの関係式から Schwarz の不等式によつて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |c_n|}{|z|^{n+1}} < 1$$

を得る。この式から再び前述の談話と同様に $W(z)$ が $|z| > \frac{1}{r(M)}$ で單葉であることがわかる。従つて $\sqrt{f(z)}$ は $|z| < r(M)$ で正則且つ單葉となる。

函数 $r(M)$ は $M = \infty$ のとき $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。 $M = 1$ のときは 1 となるからこの意味に於ける M の函数として $r(M)$ は $M = 1$ のとき限度に達してゐると言へるのであるが、これが限度を示す函数であるとは言へない。 次は

$$|a_{p+1}| \leq 2p \sqrt{1 - \frac{1}{M}}$$

であることを証明する。

$$W(z) = \frac{1}{2p \sqrt{f(\frac{1}{z^2})}} = z + \frac{d_1}{z} + \dots$$

とすれば $d_1 = -\frac{(4p+1)}{2p}$ 、 $|W(z)| > \frac{1}{M}$ となる。 前と同じ方法によつて、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |d_n|^2 \leq 1 - \frac{1}{M}$$

が認められる。従つて $|d_1|^2 \leq 1 - \frac{1}{M}$ 、 故に $|a_{p+1}| \leq 2p \sqrt{1 - \frac{1}{M}}$ を得る。

等号が成立する場合は $|d_1| = \sqrt{1 - \frac{1}{M}}$ 、 $d_2 = 0$ 、 $d_3 = 0$ 、 \dots となる。

従つて $W(z) = z + \frac{d_1}{z}$ 、 $M \neq 1$ とすれば $d_1 \neq 0$ となつて $d_1 = |d_1| e^{i\alpha}$ と書ける。 更に $M \neq \infty$ とすれば

$$\begin{aligned} |f(-e^{-i\alpha})| &= \frac{1}{(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M}})^{2p}} = (2M^2 - M + 2M^2 \sqrt{1 - \frac{1}{M}})^p \\ &= \{ M + 2M^2 (1 - \frac{1}{M} + \sqrt{1 - \frac{1}{M}}) \}^p > M^p \end{aligned}$$

となつて假定: $|f(z)| < M^p$ に反するから, $M \neq 1$ とすれば $M = \infty$ である.

$M = 1$ なるときは $d_1 = 0$ となり $w(z) = z$ 従つて $f(z) = z^p$ となる.

$M = \infty$ なるときは $|d_1| = 1$ となつて $w|z| = z + \frac{\epsilon^{id}}{z}$ 従つて

$f(z) = \frac{z^p}{(1 + e^{id}z)^{2p}}$ となる. このいづれの函数についてもおきらかに等号
が成立する. 従つて等号が成立するのは $J(z) = z^p$ か $f(z) = \frac{z^p}{(1 + e^{id}z)^{2p}}$

かのいづれかの場合に限る.