120. 集合函數列の一性質 (I)

山梨工専 黒崎 洼 (23.9.3)

§1. 一般の空間にかて一集合Eの部分集合から成る或一つの σ-Körper を $\mathfrak{M}$ とする。以下特に断わらない限り，集合及び集合函数は常にこの $\mathfrak{M}$ にぞくするもの及びこの $\mathfrak{M}$ にかて定義されているものとする集合函数を $\Phi(X)$ とかく

即ち
$$\Phi(X)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(X)$$
この様に定義された $\Phi(X)$ は　有界且 σ-加法的である.[1)]

1) O. Nikodym, Monatsh. f. Math. u Phys. B. 40. 1933

（以下特に断はりなき限り，*indexi* は 1.2……をうごくものとする。）

Eは 各函数 $\Phi_i(X)$ 及び $\Phi(X)$ に関し夫々次の様な二集合 P_i, N_i 及び P. N の和として表はされる。[2)]

$$X\subset P_i \Rightarrow \Phi_i(X)\geqq 0;\quad X\subset N_i \Rightarrow \Phi_i(X)\leqq 0$$

$$P_i\cap N_i = 0;\qquad P_i\cup N_i = E$$

$$X\subset P \Longrightarrow \Phi(X)\geqq 0;\quad X\subset N \Longrightarrow \Phi(X)\leqq 0$$

$$P\cap N = 0;\qquad P\cup N = E$$

$$\overline{W} = \overline{W}(\Phi;E) = \underset{X\subset E}{\text{borne sup}}\,\Phi(X);\ \underline{W} = \underline{W}(\Phi;E) = \underset{X\subset E}{\text{borne inf}}\,\Phi(X)$$

$$W_i = \overline{W} + |\underline{W}|$$

及び

$$\overline{W}_i = \overline{W}(\Phi_i;E)\quad \underline{W}_i = \underline{W}(\Phi_i;E)\quad W_i = \overline{W}_i + |\underline{W}_i|$$

而して，

$$\Phi_i^+(X) = \Phi_i(P_i\cap X);\ \Phi_i^-(X) = \Phi_i(N_i\cap X)$$

$$\Phi^+(X) = \Phi(P\cap X);\ \Phi^-(X) = \Phi(N\cap X)$$

とおけば Φ^+, Φ^-, Φ_i^+ 及び Φ_i^- は何れもやはり σ‐加法的であつて明らかに $\overline{W} = \Phi^+(E)$, $\underline{W} = \Phi^-(E)$; $\overline{W}_i = \Phi_i^+(E)$, $\underline{W}_i = \Phi_i^-(E)$ [3)]

茲で吾々は $\Phi^+(X)$, $\Phi^-(X)$ と $\Phi_n^+(X)$, $\Phi_n^-(X)$ との関係を考へて見よう。先づこれに対して次の定理が成立するのは明らかである。

定理 1.

$$\Phi^+(X)\leqq \varliminf_{n\to\infty}\Phi_n^+(X);\ \Phi^-(X)\geqq \varlimsup_{n\to\infty}\Phi_n^-(X)\ \cdots\cdots(1.1)$$

従つて，

$$\overline{W}\leqq \varliminf_{n\to\infty}\overline{W}_n,\ \underline{W}\geqq \varlimsup_{n\to\infty}\underline{W}_n\quad W\leqq \varliminf_{n\to\infty}W_n.\ \cdots\cdots(1.2)$$

（證明：

$$\Phi^+(X) = \Phi(P\cap X) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(P\cap X)\leqq \varliminf_{n\to\infty}\Phi_n(P_n\cap X) = \varliminf_{n\to\infty}\Phi_n^+(X)$$

$\Phi^-(X)$ についても同様

---

2) W. Sierpinski; Fund. Math. t. 5. 1924

3) H. Hahn; Reelle Funk. 1921 及び R. Frank; Fund. Math. t 5 1924.

そこで起る問題は　果して $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(X)$ が存在するときは常に $\lim_{n\to\infty}\Phi_n^+(X)$ 及び $\lim_{n\to\infty}\Phi_n^-(X)$ が存在して夫々 $\Phi^+(X)$ 及び $\Phi^-(X)$ に等しくなるか　と云ふ事である。之に対する答は否定的である。即ち吾々は次の例をあげることが出来る。

例 1

[1]の $\mathfrak{M}$ を区間 [0.1] の可測集合の σ-Körper とし X の測度を $\mu(X)$ とかくことにする，[0.1] を 2^n 等分して得る小区間を一方の端から順に $I_1^{(n)}$ $I_2^{(n)}$ ...... $I_{2^n}^{(n)}$ と名づけ任意の可測集合X及び各nに對して

$$X_j^{(n)} = X \cap I_j^{(n)} \quad (j=1.2. \cdots\cdots 2^n)$$

とかく。集合函数 $\Phi_n(X)$ を

$$\Phi_n(X) = \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^j \mu(X_j^{(n)})$$

と定義すれば $\Phi_n(X)$は σ-加法的であるのみならず一様絶対連続である。而して任意の可測集合Xに対して $\Phi(X) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(X) = 0$ である。一方明らかに $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(P_n) = \frac{1}{2}$ であるから (1.1) 及び (1.2) の等号は成立しない。

任意の可測集合Xに對し $\Phi(X) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(X) = 0$ なることの証明：—

(i)　X が一つの区間であるか、又は区間の有限系列の和集合なるときは明らかである。

(ii) X が開集合である場合。

$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$　　茲に $\{J_i\}$は何れの二つも高々端点を共有する様な閉区間の列であって $\mu(J_i) \geqq \mu(J_{i+1})$ であると考へてよい。而して $\mu(X) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(J_i)$ であるから $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=m}^{\infty}\mu(J_i) = 0$ である。正整数 S に對して、

$$\mu(X) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{S} J_i\right) = \varepsilon_S$$

とおけば　正数列 $\{\varepsilon_S\}$ は、単調に0に收斂する。

$$\Phi_n(X) = \Phi_n\left(\bigcup_{i=1}^{S} J_i\right) + \Phi_n\left(X - \bigcup_{i=1}^{S} J_i\right)$$

$\Phi_n(X)$ の定義により任意の可測集合 A に對し　$|\Phi_i(A)| \leqq \mu(A)$

$$\therefore \quad |\Phi_n(X)| \leqq \left|\Phi_n\left(\bigcup_{i=1}^{S} J_i\right)\right| + \mu\left(X - \bigcup_{i=1}^{S} J_i\right)$$

$n\to\infty$ ならしむれば

$$|\Phi(X)| \leqq \varepsilon_S$$

之はすべての S に對して成立し且 $\lim_{S\to\infty}\varepsilon_S = 0$ であるから

$$\Phi(X)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(X)=0$$

(iii) Xが任意の可測集合である場合

任意の正数 ε に對して $G\supset X$ 且 $\mu(G-X)<\varepsilon$ である様な開集合G

が存在する。

$$\Phi_n(X)=\Phi_n(G)-\Phi_n(G-X)$$

$$|\Phi_n(X)|\leqq|\Phi_n(G)|+\varepsilon$$

$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(G)=0$ εは任意の正数であるから

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(X)=0$$

(終)

例2

例1の $\Phi_n(X)$の代りに、

$$\Psi_{2n-1}(X)=\Phi_{2n-1}(X)\qquad\Psi_{2n}(X)=\frac{1}{2}\Phi_{2n}(X)$$

とすれば P_n に変りはなく

$$\Psi(P)<\varliminf_{n\to\infty}\Psi_n(P_n)<\varlimsup_{n\to\infty}\Psi_n(P_n)$$

となる。

注意

1° 上に与へた例では$\Phi(X)$が恒等的に0であるから PとNが不定であるが、$P\cup N=[0.1]$, $P\cap N=0$ なる二集合 P, N をとりさへすれば 定義 (PとNの) に叶ふ。この例を少しく修正して PとNとが確定する様にすることは容易である。

2° 例1.2 によれば $\{\Phi_n(X)\}$ 或は $\{\Psi_n(X)\}$ が一様絶對連続であつても (1.1) (1.2) の等号は成立しないことが知られる。絶對連続集合函数は 有限測度の集合、又はこの様な集合の可附番系列の和集合に對しては不定積分で表はされる。4) 例1.2は不定積分の列が任意の可測集合に對して收斂しても被積分函数の列は必ずしも收斂しない一つの例を与へてゐる。

§2 点、定理1の関係に就て次の結果が得られた。

定理2

集合Xに就て

$$\Phi^+(X)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n^+(X);\quad\Phi^-(X)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n^-(X)\text{・・・・・・}(1.3)$$

4) S. Saks; Theory of the Integral 1937

となる時にはXの任意の部分集合に對して同じ関係が成立する。

(証明)

(1.3)の二つの等式のうち一方が成立すれば他は当然成立するから　はじめの部分だけを考へる。即ち

$$\Phi^+(X) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^+(X) \cdots\cdots\cdots\cdots (1.4)$$

であるとする。それにもかゝはらずXの一部分集合Aに對しては(1.4)の関係は成り立たないと仮定すると二つの場合が考へられる。即ち

(i) $\{\Phi_n^+(A)\}$が収斂しない　か　又は

(ii) $\{\Phi_n^+(A)\}$は収斂するが $\Phi^+(A) \neq \lim_{n\to\infty} \Phi_n^+(A)$である。

(i) の場合

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Phi_n^+(A) = a$とおけば

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Phi_n^+(A) > \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \Phi_n^+(A) \geqq \Phi^+(A)$$

従って増加自然数列 $\{n_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ が存在して

$$\lim_{\nu\to\infty} \Phi^+_{n_\nu} = a > \Phi^+(A)$$

今 $A \cap B = 0$ なる一集合Bを任意にとれば、仮に $\{\Phi_n^+(A\cup B)\}$ が収斂するとしても、

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n^+(A\cup B) = \lim_{\nu\to\infty} \{\Phi^+_{n_\nu}(A) + \Phi^+_{n_\nu}(B)\} = a + \lim_{\nu\to\infty} \Phi^+_{n_\nu}(B)$$
$$\geqq a + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \Phi^+_n(B) > \Phi^+(A) + \Phi^+(B) = \Phi^+(A\cup B)$$

$\{\Phi_n^+(A\cup B)\}$が収斂しなければ当然であるが $\{\Phi_n^+(A\cup B)\}$が収斂しても集合$A\cup B$に對しては(1.4)の関係は成立しないことが知られた。BはAと互に素なる任意の集合であつたら今AのXに関する補集合をBにとれば$A\cup B = X$に對して(1.4)が成り立たないことになる。之は明らかに矛盾である。

(ii) の場合も殆んど全様の論法で矛盾に到達する。　(終)

<u>系</u>

$$\overline{W} = \lim_{n\to\infty} \overline{W}_n\ ,\quad \underline{W} = \lim_{n\to\infty} \underline{W}_n \cdots\cdots\cdots (1.5)$$

である時には任意の集合Xに對して(1.3)が成り立つことが必要にして且十分である。

定理 3

このニつの條件の少くとも一方が満されるならば (1.5) は成立つ。

(i) $\{$亜$_n(P_\nu)\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ が n に関して一様に亜$_n(P)$ に収斂する。

(ii) $\{$亜$(P_\nu)\}$ が亜(P) に収斂し、$\{$亜$_n(P_\nu)\}$ $(n=1,2\cdot\cdot\cdot)$ が ν に関して一様に亜(P_ν) に収斂する。

(證明)

(i) の方だけを考へるに、収斂の一様性から 正数 ε が与えられたとき n に対して充分大なる n_0 をとれば $n \geqq n_0$ なるすべての n に対し

$$|\text{亜}_n(P_n)-\text{亜}(P)| \leqq |\text{亜}_n(P_n)-\text{亜}_n(P)|+|\text{亜}_n(P)-\text{亜}(P)|$$

$<\varepsilon$ たらしめ得る。 (終)

注意

$\overline{P}=\overline{\lim_{n\to\infty}} P_n$, $\underline{P}=\underline{\lim_{n\to\infty}} P_n$; $\overline{N}=\overline{\lim_{n\to\infty}} N_n$, $\underline{N}=\underline{\lim_{n\to\infty}} N_n$ とかけば任意の集合 X に対し、一般に

$0\leqq$ 亜$(\underline{P}\cap X)\leqq$ 亜$(\underline{P})\leqq$ 亜(P); 亜$(\overline{P})\leqq$ 亜(P); 亜$(\underline{P}\cap N\cap X)=0$ なることが云へるが、亜$(\overline{P})$ と亜$(\underline{P})$ の大小は定まらない。大小関係が反対になる様な例を挙へ得る。(1.5) が成り立つ場合は亜$(P\cap\overline{P})=$ 亜(P) となる。N, $\overline{N}$, $\underline{N}$ に関しても上と對稱の結果が出る。 (終)