121. Algebra ノ Separabilityニ就テ

池田正駿 (23.9.30)

Algebra $\mathfrak{a}$ ノ Separabilityニ関シテ Hochschild ハスベテノ two-sided $\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{p}$ ニツイテ $H^{(1)}(\mathfrak{a}:\mathfrak{p})=0$ ナル必要充分條件ヲ出シテヰルガ. (Ann. of math. 46 1945) 此処デハ少シ形ノ違フ Th. 1. 及ビ上ノ $\mathfrak{p}$ ニ制限ヲツケタ Th. 2 ヲ証明シマス.

Lemma 1

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{F}$ ノ上ノ Simple alg. $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{a}$ ノ centrum 且 $\mathfrak{L}=\mathfrak{F}(c_1,\cdots,c_m)$

$c_i^p=\gamma_i\in\mathfrak{F}$

$\mathfrak{F}$ ノ標數 $p\neq 0$ トスルト

$$\mathfrak{D}/\mathfrak{g}\cong\mathfrak{E}$$

但 $\mathfrak{D}$: $\mathfrak{a}$ ノ over $\mathfrak{F}$ ナル derivation alg.

$\mathfrak{g}$: $\mathfrak{D}$ ノ inner derivation ノツクル ideal

$\mathfrak{E}$: $\mathfrak{L}$ ノ over $\mathfrak{F}$ ナル derivation alg.

註) コノ Lemma ハ Jacobson ノ abstract derivation and Lie algebras (Trans Am. Math 1937 (42) P. 220) ニヨル.

Lemma 2

$\mathfrak{a}$: semi-simple alg. 且 $H^{(1)}(\mathfrak{a},\mathfrak{a})=0\longrightarrow\mathfrak{a}$: Separable.

Proof

$\mathfrak{a}$ ハ Semi-simple ナル故 Simple components ノ直和デ component ノソレ自身ノ中ヘノ derivation ハ $\mathfrak{a}$ ノ derivation ニ拡張出来ルカラ.

$\mathfrak{a}$ ガ inseparable simple ノ時 $H^{(1)}(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\neq 0$ ナル事ヲ示セバ充分デアル.

ヨッテ $\mathfrak{a}$ inseparable simple トスル.

$\mathfrak{a}$ ノ centrum $\mathfrak{L}$ トスル. $\mathfrak{L}\geqq\mathfrak{F}$ デアル. $\mathfrak{L}$ ハ $\mathfrak{F}$ ノ inseparable extension デアルカラ $\mathfrak{L}\geqq\mathfrak{L}^{(p)}\geqq\mathfrak{F}$ $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}^{(p)}(c_1,\cdots,c_m)$

$c_i^p=\gamma_i\in\mathfrak{L}^{(p)}$ (Albert: structure of alg. p.33) $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{L}^{(p)}$ ノ上ノ alg. ト考ヘテ ソノ derivation alg. ヲ $\mathfrak{D}'$ トスルト $\mathfrak{D}'$ ハ $\mathfrak{a}$ ヲ

$\mathfrak{k}$ ノ上ノ alg. ト考ヘテ、ソノ derivation alg. $\mathfrak{d}$ ノ Subalg. ($\mathfrak{L}^{(p)}$ ヲ constants field トスル如キノト考ヘラレル。即チ $\mathfrak{d} \supseteqq \mathfrak{d}'$ 又明ラカニ inner derivation ノツクル ideal $\mathfrak{J}$ ハ $\mathfrak{L}^{(p)}$ ヲ constants field トスルカラ $\mathfrak{d}' \geqq \mathfrak{J}$. シカルニ Lemma 1 ニヨリ $\mathfrak{d}'/\mathfrak{J} \cong \mathfrak{E}$.
但 $\mathfrak{e}$ ハ $\mathfrak{L}$ ノ $\mathfrak{L}^{(p)}$ ノ上ノ derivation alg. 且 $\mathfrak{L}$ ハ $\mathfrak{L}^{(p)}$ ノ inseparable extension ナル故 $\mathfrak{E} = 0$ $\therefore \mathfrak{d}'$ 従ッテ $\mathfrak{d}$ ハ inner ナラザル derivation ヲ含ム.

$\therefore H^{(1)}(\mathfrak{a}.\mathfrak{a}) \neq 0$

Th. 1. $\mathfrak{a}$: alg. 且 $H^{(1)}(\mathfrak{b}:\mathfrak{b}) = 0$ for all ideals $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$
$\rightleftarrows$ $\mathfrak{a}$: separable

Proof

(→ ノ証明) $\mathfrak{a}$ ガ semi-simple デナイトスル. radical ヲ $\mathfrak{n}$.

$\mathfrak{n}$ ノ exponent ρ トスル. $\rho > 1$

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{n}^{\rho-1}, \mathfrak{n}^{\rho-1}) = 0$

即 f ヲ derivation トスルト $f(n) = nt - tn$ $n \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$

$t \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$ ナル t ガアル.

$(\mathfrak{n}^{\rho-1})^2 = 0$ ヨリ $f(n) = 0$ for all $n \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$

ヨッテ derivation ハ 0 以外ニナイ.

シカルニ $\varphi(n) = n$ ナル mapping ハ linear デアリ

且 $\varphi(nm) = nm = 0$ $n\varphi(m) + \varphi(n)m = 2nm = 0$.

$n, m \in \mathfrak{n}^{\rho-1}$

$\therefore \varphi(nm) = n\varphi(m) + \varphi(n)m$

$\therefore \varphi$ ハ non-zero derivation コレハ矛盾

$\therefore \mathfrak{a}$ ハ semi-simple デナケレバナラヌ.

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a}.\mathfrak{a}) = 0$ 故ニ Lemma 2 ニヨリ $\mathfrak{a}$ ハ separable.

(← ノ証明)

$\mathfrak{a}$ ガ separable ナラ ソノ ideal ハスベテ separable. 従ッテ $H^{(1)}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 0$ for all ideal $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$ ハ明ラカデアル.

Example（$H^{(1)}(\mathfrak{n}:\mathfrak{a})=0$ ダケデハ一般ノ $\mathfrak{a}$ ハ separable ヲ結論出来ナ（例）

K ハ標数 2 ノ field. $\mathfrak{a}=Ka+Kb$ $a^2=a$, $ab=b$, $ba=0$ $b^2=0$ ニヨッテ定義サレル alg. $\mathfrak{a}$ ハ radical (b) ヲモツ. 且 $H^{(1)}(\mathfrak{a}:\mathfrak{a})=0$ デアル. ソレハ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{a}$ ナル derivation（0 ナラザル）ハ

$$f_1\begin{cases} a\to b \\ b\to 0\end{cases}\qquad f_2\begin{cases} a\to b \\ b\to b\end{cases}\qquad f_3\begin{cases} a\to 0 \\ b\to b\end{cases}$$ デ

f_1 ハ b ニヨリ与エラレル inner derivation

f_2 ハ $a+b$ ニヨリ与エラレル inner derivation

f_3 ハ a ニヨリ與エラレル inner derivation

ナルコトニヨリ分ル.

Th. 2 $\mathfrak{a}$: alg ノ $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}/\mathfrak{c})=0$ for all ideals $\mathfrak{b}\geqq\mathfrak{c}$（但 $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ハ $\mathfrak{a}$ 又ハ 0 ナルコトヲ許ス）$\rightleftarrows$ $\mathfrak{a}$: separable

但. $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ ハ Dimentweise ニ $a*\mathfrak{b}/\mathfrak{c}=\bar{a}\cdot\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$　$\mathfrak{b}/\mathfrak{c}*a=\mathfrak{b}/\mathfrak{c}\cdot\bar{a}$（$a\in\mathfrak{a}$ $\bar{a}$ ハ a ノ属スル $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ ノ class）ニヨッテ two-sided $\mathfrak{a}$-module ト考エル.

Proof

（→ ノ証明）

1) $\mathfrak{a}$: Semi-Simple ナル時ハ 上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a}:\mathfrak{a})=0$ 故ニ Lemma 2 ニヨッテ $\mathfrak{a}$: separable.

2) $\mathfrak{a}\geqq\mathfrak{n}$（radial）トスル.

$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ into $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ノ derivation ヲ f トスル.

$f^*(a)=f(\bar{a})$ ニヨッテ linear ナ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ノ mapping f^* ヲ定義スルト. $f^*(ab)=f(\bar{a}\bar{b})=\bar{a}f(\bar{b})+f(\bar{a})\bar{b}=a*f^*(b)+f^*(a)*b$ ヨリ f^* ハ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ノ derivation.

上ノ條件カラ $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}/\mathfrak{n})=0$ ダカラ $\bar{c}\in\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ガアッテ

$f(\bar{a})=f^*(a)=a*\bar{c}-\bar{c}*a=\bar{a}\cdot\bar{c}-\bar{c}\cdot\bar{a}$

$\therefore$ $H^{(1)}(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}:\mathfrak{a}/\mathfrak{n})=0$ 且 $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ ハ Semi simple. 故ニ Lemma 2 ニヨリ $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}$: separable 故ニ $\mathfrak{a}\equiv\mathfrak{a}^*+\mathfrak{n}+N$

subalg $\mathfrak{a}^*$ ガ存在スル。

$\mathfrak{n}^2 = 0$ ナル時ハ　$f(n) = n$.　$n \in \mathfrak{n}$.

$f(a^*) = 0$　$a^* \in \mathfrak{a}^*$

$f(a) = f(a^*) + f(n)$　$a = a^* + n \in \mathfrak{a}$

ニヨリ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}$ ナル linear mapping f ヲ定義スルト

$\mathfrak{n}^2 = 0$ ナルコトヲ使ヘバ

$f((n+a^*)(m+b^*)) = f(nm + a^*m + nb^*) + f(a^*b^*)$

但 $n\ m \in \mathfrak{n}$　$a^*.\ b^* \in \mathfrak{a}^*$

$= f(a^*m + nb^*) = a^*m + nb^*$

又 $(n+a^*)f(m+b^*) + f(n+a^*)(m+b^*) = (n+a^*)m + n$

$(m+b^*) = a^*m + nb^*$

$\therefore f((n+a^*)(m+b^*)) = (n+a^*)f(m+b^*) + f(n+a^*)(m+b^*)$

故ニ f ハ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}$ ナル derivation.

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{n}) = 0$ ナル故 f ハ inner デアル.

ヨツテ $f(n) = n\tau - \tau n$.　$\tau \in \mathfrak{n}$　$\mathfrak{n}^2 = 0$ ヨリ

$f(n) = 0$ · for all $n \in \mathfrak{n}$

ナルニ $f(n) = n$.　コレハ矛盾　$\therefore \mathfrak{n} = 0$ デナケレバナラナイ.

$\mathfrak{n}^2 \neq 0$ ナル時ハ

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathfrak{a} : \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = 0$　$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2$ into $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ノ derivation

ヲ f トスレバ $f^*(a) = f(\bar{a})$（但 $a \in \mathfrak{a}$ $\bar{a}$ ハ $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2$ ノ a ノ屬スル

class）ニヨリ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ノ linear mapping f^* ヲ定義

スルト f^* ガ $\mathfrak{a}$ into $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ ノ derivation ナルコトハ前ト同樣

ニ證明出來ル. 又 f^* ガ inner ナル事ヨリ f ガ inner ナル事モ又前

ト同樣ニ云ヘルカラ　$H^{(1)}(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2 : \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = 0$

$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2$ ノ radical ハ $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$　$\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2 / \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{n}$ separable

ヨリ $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{a}'/\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$

$(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)^2 = 0$

コレハ前ノ場合ト同ジデアルカラ $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = 0$　$\therefore \mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2 = 0$ デアル

從ツテ $\mathfrak{a}$ ノ semi-simple ナル事ガ知レル. 即チ 1) ニヨツテ $\mathfrak{a}$

ノ Separable ナル事ヲ知ル。

(← ノ証明)

Hochschild ノ結果カラ明ラカデアル。

以上ニヨッテ Hochschild ノ條件ノスベテノ two-sided $\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{p}$ ノ代リニ上ノ様ナ $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ テオキカヘテ置イテ充分デアル事ガワカッタノデスガ二三ノ例ニツイテ見ルト radical ノ現ハレル alg. $\mathfrak{a}$ デハ $\mathfrak{a}$ カラ radical ヘノ derivation ガ inner テナクナリ 從ッテ 上ノ條件ヲ 單ニ $H^{(1)}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ for all ideal $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$ デ置キ換ヘラレルノデハナイカト思ハレマス。

然シコレハ少シ難カシクテ証明出来マセン。 以上