122 双計量Riemann空間に就て(IV)

京都學藝 田畑不二夫(1949. 10. 1)

□17. $S^{\lambda}_{\mu\nu}+T^{\lambda}_{\mu\nu}$ ハ座標変換ニ對シテ通常ノ移変ノ係数ト全ク同様ナ変換ヲ受ケル. II, IV, V) ヲ先ズ空間ニ於テハ之ハ $S^{\lambda}_{\mu\nu}+t^{\lambda}\frac{\partial t_{\mu}}{\partial u^{\nu}}$ ノ形ヲトリ ソノ座標系ヲ $ds^2=S_{lm}\,du^l du^m$, $dt=du^0$ ナルヤウニ択ベバ・ソノ系デハ $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ ト全ジ定義数ヲ持ツ. 又コノトキ $t^{\alpha}S_{\mu\nu,\alpha}$ ハ $\frac{1}{2}\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^0}$ ナル形ヲモツ. 尚ホ $-2t^{\alpha}S_{\mu\nu,\alpha}\equiv\underline{S}_{\mu\nu}^{\rho}$ ト置イテ作レル $S^{\lambda}_{\mu\nu}-\underline{S}^{\lambda}_{\mu\nu}$ ハ Tensor デアル事ニ注意シテ置ク.

□18 $e^{\lambda\mu\nu\omega}$ ハ $\lambda\mu\nu\omega$ ナル数列ガ奇或ハ偶順列ナルニ從ツテ -1 或ハ $+1$ ヲ表ストスルナラバ $\frac{1}{2}\sqrt{S_{\lambda\beta}t^{\lambda\beta}}\,e^{\lambda\mu\nu\omega}\equiv\epsilon^{\lambda\alpha\nu\omega}$ トオクトキ S^{λ} ト S'^{λ} トノ Vector 積ハ $\epsilon^{\alpha\lambda}{}_{\mu\nu}t_{\alpha}S^{\mu}S'^{\nu}$ ヲ以テ表ハサレル. 尚任意ノ反変 Vector ハ之ヲ四元数ト見ル事ガ出来ル事カラ ソノ積 $A\times B=(t^{\lambda}_{\alpha\beta}+S^{\lambda}_{\alpha}t_{\beta}+S^{\lambda}_{\beta}t_{\alpha}+\epsilon^{\gamma\lambda}{}_{\cdot\cdot}t_{\gamma}t_{\gamma}-t^{\lambda}S_{\alpha\beta})A^{\alpha}B^{\beta}$ ト表ハシ得.

iV, V) ナル空間ガ更ニ i) ヲモ満足スルタメノ條件ハ
$A^{\lambda}\equiv\epsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}t_{\alpha}\left(\frac{\partial t_{\beta}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial t_{\gamma}}{\partial u^{\beta}}\right)=0$ ノ形ニ書ケル尚ホ $t_{\alpha}A^{\alpha}=\rho$ 且
$A^{\alpha}\left(\frac{\partial t_{\alpha}}{\partial u^{\lambda}}-\frac{\partial t_{\lambda}}{\partial u^{\alpha}}\right)$ ト t_{λ} トハ平行ニ ソノ面ハ.

$\sqrt{|s^{\lambda\mu}+t^{\lambda\mu}|}\left|\frac{\partial t_\lambda}{\partial u^\mu}-\frac{\partial t_\mu}{\partial u^\lambda}\right|$ ナル Scalar デアル事モ判ル.

又 $a_{\lambda\nu}+a_{\nu\lambda}=0$ ニシテ $\|a_{\lambda\mu}\|$ ノ rank ガ 0 デモ 4 デモナイトキニハ $a_{\lambda\alpha}v^\alpha=0,\ t_\alpha v^\alpha=0$ ナル v^λ ハ $\epsilon^{\alpha\lambda\beta\gamma}t_\alpha a_{\beta\gamma}$ トシテ求メラレル.

□19. 切テ適当ナ座標変換ノ後 $dt=du^0$, $ds^2=s_{lm}du^l du^m$ (ココニ $l,m=1,2,3$ ニシテ $\|s_{lm}\|$ ハ3位正定型式) ナル計量リーマン空間ヲ考察シテ行クトキ便宜上吾々ノ所謂『運動学』的表現ヲ採用スル事ノアル事ヲ許サレタイ. 例ヘバ $u^l=a^{(l)}$ ハ「流体点」ヲ u^0 ハ時刻ト解釈スル等デアル.
尚ホコノ計量リーマノ空間ヲ「(流体)時空」トモ云フ事トスル.

□20 u^λ ニ於ケル切線空間中ニ於ケル近傍流体ノ変形運動ヲ考ヘル際ニ歪ノ主軸ト歪度ト云フノハ $\left|\frac{1}{2}\dot{s}_{\lambda\mu}-\alpha s_{\lambda\mu}\right|=0$ ヲ導入スル事ニヨツテ $\frac{1}{2}\dot{s}_{\lambda\mu}$ ノ主方向トシテ求マリ ソノ主軸ノ大キサモ彼ノ根 $\alpha_{(i)}$ ニヨツテ与ヘラレル.

$\frac{1}{2}\frac{\partial s_{\lambda\mu}}{\partial u^0}s^{\lambda\mu}$ ハ同一流体点ニ着目シテノ体積変化ノ割合ヲ示ス.

一流体点ヲ指定スル毎ニ一ツ且ツ定義数一定ナル空間 Vector 野ヲ流体 Vector 野ト云フ事ニスル. 今一ツノ流体 Vector 野ヲ「静止方向即 t^λ 方向ニ $\left\lfloor\frac{\partial}{\partial u}\right\rfloor$ ニ関シテ平行移動」(コノ事ヲ静止的ニ平行移動サセル或ハ静止サセル等ト言表ス) シテモ方向ハ変ラナイトキハ $\frac{\delta v^\lambda}{\delta t}=\frac{1}{2}s^{\lambda\alpha}\frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial u^0}v^\beta=\alpha v^\lambda$ トナツテ来ルノデアルガ コノ v^λ ハソノ時刻ニ於ケル歪軸ト一致シテ来ル事ヲ証明デキル. 且ツコノ三流体方向ハソノ瞬間直交ヲ保ツト云フ性質ガアル.

□21 歪ミハ之等歪軸ニ関シテ対称デアル事カラ コノ三流体方向ガ各瞬間ニ於テ粘着スルト考ヘラレル一ツノ運動学的空間ガ考ヘラレ u^λ ノ近傍ガ之ニ相対的ニ静止スルトモ見ラレル所カラ u^λ ニ於ケル静止空間 R ト名付ケル事トシヨウ.

u^λ ノ近傍ノ流体運動ヲコノ R ニ射影シタトキ R 中ニ於ケル運動ハ u^λ ニ於テ無渦動デアル事ガ確カメラレル.

一般ニ流体ベクトル v^λ ハ R ノ中デ $\epsilon^{\lambda\alpha}{}_{\beta\gamma}\, t_\alpha s^{\beta\varepsilon}\frac{\partial s_{\varepsilon\delta}}{\partial u^0}v^\delta v^\gamma \div \delta t$ ナル Vector デ回転スル.

□22 $(u^l\ u^0)$ ノ静止空間 R ノ中ニ於ケル $(u^l+du^l,\ u^0)$ ノ静止空間 R ヘ射影ノ回転 Vector θ^λ ハ $\theta^\lambda_\mu=\epsilon^{\delta\lambda\alpha\beta}t_\delta s^\alpha_\alpha s^\beta_\beta \dot{s}_{\mu\varepsilon}(s^\varepsilon_{\alpha\beta}-\dot{s}^\varepsilon_{\alpha\beta})$ ヨリ作ラレタル $\theta^\lambda_\mu du^\mu$ トシテ求メラレル

□23　尚 R 中ニ於ケル $(u^\lambda)_0$ ノ近傍ノ運動ノ射影ハ二次ノ無限小ノ程度ニ於テハ $(\alpha_i e))_0$, $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}S^\alpha_\mu\right)_0$, $(\theta^\lambda_\mu)_0$ 及ビーツノ「遊ビ」デ決マリ、之等ノ曲率ノ量ハ相互ニ独立デアル。

モノ此ノ考察ヲ平面流体運動ニ関シテ行フトキハコノ「遊ビ」ハ存在シナイコトハ注意スベキデアル。

□24　傳播速度 $v=v(u^\lambda)$ ナルトキ $\int dt=\int\frac{ds}{v}=\int\sqrt{\frac{S_{ln}}{v^2}du^l du^n}$ $\equiv\int\sqrt{K_{ln}\,du^l du^n}$ ヲ考ヘテ $\delta\int^{(u^\lambda)_1} dt=0$ ノ解ヲ求メテ見ヨウ。

$$\delta\int_{(u^\lambda)_0}^{(u^\lambda)_1} dt=\left[\delta u^a K_{ab}\frac{du^b}{dt}\right]_{(u^\lambda)_0}^{(u^\lambda)_1}-\int K_{la}\frac{d^2u^a}{dt^2}+K_{ab,l}\frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt}$$

$$\delta u^l-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{ab}}{\partial u^\lambda}\frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt}\delta u^a dt$$

依テ之ニ第一ニ $(u^\lambda)_0$, $(u^\lambda)_1$ ニテ $\delta u^\lambda=0$ ナル條件ヲ与フル事トスル。第二ニ du^λ ヲ通ル $F=0$ (□3) ノ切瑞曲面ハコノ瑞台定素数ガ $K_{la}\,du^a\,dt$ ナル共変 Vector デ表ハサレル事カラ δu^λ ガソノ上ニアル事即 $K_{la}\,du^a\,\delta u^l-dt\,\delta u^0=0$ ナル條件ヲ賦与スル事トスル。

以上ノ二條件ヲ $\delta\int_{(u^\lambda)_0}^{(u^\lambda)_1}dt=0$ ニ用ヒテ δu^λ ヲ消去スレバ速度分布 $v(u^\lambda)$ ナル條件下ノ傳播曲線ノ方程式トシテ

$$K_{la}\frac{d^2u^a}{dt^2}+K_{ab,l}\frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\partial K_{ab}}{\partial u^c}$$

$$\frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt}K_{lc}\frac{du^c}{dt}\quad 即\quad \frac{d^2u^l}{dt^2}+S^l_{ab}\frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt}+\frac{du^l}{dt}\Big(-\frac{1}{v^2}\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial S_{ab}}{\partial u^0}\frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt}-\frac{2}{v}\frac{\partial v}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}+\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial u^0}\Big)+vS^{la}\frac{\partial v}{\partial u^a}=0$$ 之ハ□

10 ニ満タルモノノ特別ノ場合ニアツテ更ニ v=常数トスレバ □10. 之デ與ヘ得タルモノヲ別ノ仮定カラ得タ事トナル。即此ノ Huygens ノ原理カラ求メタクルニ対シ之ハ Fermat ノ原理ニヨルモノデアル。

□25　又之ヲ弾性力学ニ於ケル Lagrange ノ方程式ノ形ニ表ハス事ガ出来ル。$T=\frac{1}{2}S_{ln}\dot u^l\dot u^n$ $\left(\dot u^l=\frac{du^l}{dt}\right)$ トオク事ニヨリ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot u^l}\right)=\frac{\Delta T}{\Delta u^l}$ トスレバヨイ。但シココニ $\frac{\Delta}{\Delta u^l}$ ナル Operation ハ $\frac{\partial}{\partial u^l}+\frac{\partial t}{\partial s}S_{la}\frac{du^a}{ds}\frac{\partial}{\partial t}$ ヲ表スモノトシタ。

□26. 尚又 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}S^{\lambda\alpha}\left\{\frac{\partial S_{\alpha\nu}}{\partial u^\mu}+\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^0}\left(\frac{dt}{ds}S_{\mu\alpha}\frac{du^\beta}{ds}-t_{\mu\alpha}\right)+\right.$

$\frac{\partial S_{\lambda\mu}}{\partial u^{\nu}}+\frac{\partial S_{\sigma\mu}}{\partial u^{\sigma}}\left(\frac{dt}{ds}S_{\nu\beta}\frac{du^{\beta}}{ds}-t_{\nu}\right)-\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}}-\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^{\sigma}}\left(\frac{dt}{ds}S_{\alpha\beta}\frac{du^{\beta}}{ds}-t_{\alpha}\right)\Big\}$ ヲ用フレバ

$$\frac{d^{2}u^{\ell}}{dt^{2}}+\Delta\Gamma^{\ell}_{\alpha\beta}\frac{du^{\alpha}}{dt}\frac{du^{\beta}}{dt}=0$$ ノ形ニ表ス事ガ出来ル.

□27 $\Delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}du^{\nu}=\Big\{\Big(s\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+t^{\lambda}\frac{\partial t_{\mu}}{\partial u^{\nu}}-\frac{1}{2}S^{\lambda\alpha}t_{\mu}\frac{\partial S_{\sigma\nu}}{\partial u^{\sigma}}\Big)+\frac{S^{\lambda\alpha}}{2}\frac{dt}{ds}\frac{du^{\rho}}{ds}\Big(\frac{\partial S_{\alpha\nu}}{\partial u^{\sigma}}S_{\mu\beta}-\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^{\sigma}}S_{\alpha\beta}\Big)\Big\}du^{\rho}$ デアルガ 之ヲ $A^{\lambda}_{\mu\nu}du^{\nu}$ ト オキタル $A^{\lambda}_{\mu\nu}$ ハ □三ニ於ケル計量移変ノ條件ヲ備ヘテヰル事ガ分リ ソノ第二項ハ $D^{\lambda}_{\mu\nu}$ ニ相当スルモノデアッテ之ハ静止空間ニ対スル移変ニヨル回轉ヲ表スモノデアッタ コノ回轉 Vector ヲ D^{λ} トスレバ $D^{\lambda}=\epsilon^{\delta\lambda}{}_{\alpha\beta}t_{\delta}S^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial S_{\varepsilon\varsigma}}{\partial u}\frac{du^{\varsigma}}{ds}\frac{du^{\gamma}}{ds}$ デアッテ 之ハ静止空間ニ於ケル宗体 Vector $\frac{du^{\lambda}}{ds}$ ノ回轉 Vector (□22.) ニ相当スルモノデアル. 尚コノ D^{λ} ハ du^{λ} ト直交シ 且ツソノ方向ハ相互ニ共軛的デアルヲ確カメル事ガ出来ル. (時空ノ研究6)

(昭和25. 8. 30)