123. 定常な週期分布に就て

梯　鉄次郎（1948.10.15）

§1. 定義其の他

（定義1）

<0.1> に於ける可測函数 $X(\xi)$ の週期分布 $F(x)$ を次式により定義する。

即ち　$0 \leqq x < 2\pi$ に対して

$$F(x) = \left| \xi : 0 \leqq X(\xi) \ (mod\, 2\pi) \leqq x \right| \cdots\cdots\cdots (1)$$

然るとき $F(x)$ は $\langle 0, 2\pi \rangle$ にて 右に半連続な単調非減少函数となり $F(2\pi) = 1$ なる関係を満足する。例へばルーレット Fourier 環に於ける誤差等は週期分布の問題と考えられる。

（定義2）

週期分布が次の関係を充す場合 $F(x)$ は定常であると云ふ。即ち

$$F(x) = F(x) * F(x) = \int_0^{2\pi} F(x-y)\, dF(y) \cdots\cdots\cdots (2)$$

定常分布を $F^*(x)$ で表はす事にする。

此の事は *time parameter* τ を導入した場合

$$F(x, \tau_1+\tau_2)=F(x, \tau_1) * F(x, \tau_2) - F(x, \tau_1)$$

となり．τに無関係である事と同等である

（定義3）

週期分布 $F(x)$ に於て

$$\varphi(\lambda)=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x}\, dF(x) \qquad \lambda=\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \quad (3)$$

なる $\varphi(\lambda)$ を $F(x)$ の固有値と云う事にする．

(3) 及び (1) より

$$\varphi(\lambda)=\int_0^1 e^{i\lambda X(\xi)}\, d\xi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

が得られる．

又 $\varphi(\lambda)$ の性質として (3) より直ちに分る事は

$$\varphi(0)=1 \qquad \varphi(-\lambda)=\overline{\varphi(\lambda)}$$
$$|\varphi(\lambda)| \leqq \varphi(0)=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ここに $\varphi(\lambda)$ は 正の定符号数列を作る．即ち 任意の複素数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n$

に對して

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{n} \varphi(\mu-\nu)\alpha_\mu \overline{\alpha_\nu} \geqq 0$$

なる事が証明出来る．又逆に $\varphi(0)=1$ を満足する正の定符号数列 $\varphi(\lambda)$ に對しては

$$\varphi(\lambda)=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x}\, dF(x)$$

なる関係を満足する $F(x)$ が存在する事が証明される．

§2. 定常分布の固有値

$F(x)$ が定常なる場合 即ち $F(x) * F(x) = F(x)$ なる場合の固有値に就て考える．先づ．

（補助定理1）

定常週期分布 $F^*(x)$ の固有値を $\varphi(\lambda)$ とすれば．

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi(\lambda)=0 \ \text{又は} \ 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

（証明）

任意の週期分布 $F_1(x)$．$F_2(x)$ の固有値を夫々 $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)$ とし

$F(x)=F_1(x)*F_2(x)$ の固有値を $\varphi(\lambda)$ とすれば

$$\varphi(\lambda)=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x}d_x\left(\int_0^{2\pi}F_1(x-y)dF_2(y)\right)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x}d_xF_1(x-y)dF_2(y)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda(x+y)}dF_1(x)dF_2(y)=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x}dF_1(x)\int_0^{2\pi} e^{i\lambda y}dF_2(y)$$

$$=\varphi_1(\lambda)\ \varphi_2(\lambda)$$

即ち　$\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\ \varphi_2(\lambda)$ ……………………(7)

となる。

従って　$F^*(x)=F^*(x)*F^*(x)$　に對しては

$$\varphi(\lambda)=[\varphi(\lambda)]^2$$

となり　従って(6)が証明出来た

之は $F(x)$ が定常なる爲の必要條件である。更に

(補助定理2)

週期分布 $F(x)$ の固有値 $\varphi(\lambda)$ に於て　0ならざる μ に就て

$\varphi(\mu)=1$　なるときは　$\lambda=0\ (\mathrm{mod}\ \mu)$ なる λ に対して

$\varphi(\lambda)=1$

(証明)

$\mu\neq 0$ なる μ に対して $\varphi(\mu)=1$ なれば (4)より

$$\varphi(\mu)=\int_0^1 e^{i\mu X(\xi)}d\xi=1$$

即ち　測度0を除いて

$$\mu X(\xi)=0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

従って任意の整数 n に就いて

$$n\mu X(\xi)=0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

即ち　$\varphi(n\mu)=\int_0^1 e^{in\mu X(\xi)}d\xi=1$

之で補助目的が証明された

斯の如く μ の正の最小値を ρ とするとき

$$\begin{cases}\varphi(\lambda)=1 & \lambda=0\quad(\mathrm{mod}\ \rho)\\ \varphi(\lambda)=0 & \lambda\neq 0\quad(\mathrm{mod}\ \rho)\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots(8)$$

なることは

$$\rho\chi(\xi)=0 \pmod{2\pi} \quad \text{即ち} \quad \chi(\xi)=0 \pmod{\frac{2\pi}{\rho}}$$

なることより明らかであろう。

(8) を満足する $\varphi(\lambda)$ を $\varphi_\rho(\lambda)$ と書く事にする。此の場合 $\varphi(\lambda)$ は $\varphi(0)$ を中心として対稱 即ち

$$\varphi(-\lambda)=\varphi(\lambda)$$

であるから $\varphi(0)$ $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ …… を列記すれば、

$\varphi_1(\lambda)$	1 1 1 1 1 ……
$\varphi_2(\lambda)$	1 0 1 0 1 0 ……
$\varphi_3(\lambda)$	1 0 0 1 0 0 1 0 ……

etc.

となる。然るとき定常分布の必要條件として 次の補助定理を得る。

(補助定理 3)

定常分布 $F^*(x)$ の固有値は $\varphi_\rho(\lambda)$ である。ここに $\rho=1, 2, 3, \cdots \infty$ の何れかである。

$\varphi_\infty(\lambda)$ が固有値であれば 定常分布の固有値であることは (補助定理 1) より明らかである。

$\varphi(\lambda)=\varphi_\rho(\lambda)$ は定常分布の必要條件であつて、充分條件であるかどうかは分らない。之を証明するには $\varphi_\rho(\lambda)$ が正の定符号数列を作ること、即ち $\varphi_\rho(\lambda)$ には必ず分布函数が對応することを証明せねばならない。

次に之を述べる。

§3. 定常週期分布

正の整数 ρ に対して、$x=0, \frac{2\pi}{\rho}, \frac{4\pi}{\rho}, \cdots\cdots, \frac{2(\rho-1)}{\rho}\pi$ に於て、$\frac{1}{\rho}$ づつの飛躍のある単調増加階段函数を $F_\rho^*(x)$ と書くことにする。即ち

$$F_\rho^*(x)=\begin{cases} \frac{1}{\rho} & 0 \leqq x < \frac{2\pi}{\rho} \\ \frac{2}{\rho} & \frac{2\pi}{\rho} \leqq x < \frac{4\pi}{\rho} \\ \vdots & \\ 1 & \frac{2(\rho-1)}{\rho}\pi \leqq x < 2\pi \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

依るとき　$F_\rho^*(x)$ の固有値は

$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x} dF_\rho^*(x) = \frac{1}{\rho}\sum_{m=0}^{\rho-1} e^{\frac{2\pi i m\lambda}{\rho}}$$

$$= \frac{1}{\rho}\,\frac{1-e^{2\pi i\lambda}}{1-e^{\frac{2\pi i\lambda}{\rho}}} = \begin{cases} 0 & \lambda \neq 0 \pmod{\rho} \\ 1 & \lambda = 0 \pmod{\rho} \end{cases}$$

従つて $F_\rho^*(x)$ の固有値は前述の $\varphi_\rho(\lambda)$ になる。あらゆる正の整数 ρ に対して $F_\rho^*(x)$ は存在する。特に $\varphi_\infty(\lambda)$ に対しては $F_\rho(x)$ の極限函数として

$$F_\infty^*(x) = \frac{x}{2\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

が対応することは明らかである。以上定常分布が必要充分條件として次の定理が得られる。

〔定理 1〕

週期分布 $F(x)$ が定常である爲の必要充分條件は

$$F(x) = F_\rho(x) \qquad \rho = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

なることである。従つて固有値として $\varphi_\rho(\lambda)$ を有することである。

ここに $F_\rho(x)$, $\varphi_\rho(\lambda)$ は夫々 (9), (8) によつて定義されるものとする。

(系)

0.1. を要素とする正の定符号数列は $\varphi_\rho(\lambda)$ である。

この系は直接にも証明出来るでせうが、ここでは〔定理 1〕及び今までの事から明らかである。

又、定常分布同志の Convolution は又定常分布になることは　明らかであるが、それに関して次の定理が得られる。

〔定理2〕

$$F_{\rho_1}^*(x) * F_{\rho_2}^*(x) = F^*_{(\rho_1,\rho_2)}(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

ここに (ρ_1, ρ_2) は ρ_1, ρ_2 の最小公倍数を表はすものとする。更に一般に

$$F_{\rho_1}^*(x) * F_{\rho_2}^*(x) * \cdots\cdots * F_{\rho_N}^*(x) = F^*_{(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_N)}(x) \cdots\cdots(12)$$

特に $F_\infty^*(x)$ に對しては　任意の週期分布 $F(x)$ に就て

$$F_\infty^*(x) * F(x) = F_\infty^*(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

（証明）

まづ（11）を証明する。

$F_{\rho_1}(x)$，$F_{\rho_2}(x)$ の固有値は夫々 $\varphi_{\rho_1}(\lambda)$，$\varphi_{\rho_2}(\lambda)$ であり $F_{\rho_1}^*(x)$ と $F_{\rho_2}^*(x)$ の固有値は（7）により

$$\varphi_{\rho_1}(\lambda)\varphi_{\rho_2}(\lambda)=\varphi_{(\rho_1,\rho_2)}(\lambda)$$

となる。又 $\varphi_{(\rho_1,\rho_2)}$ の分布函数は $F^*_{(\rho_1,\rho_2)}(x)$ なることより（12）は明らか。

（12）も同様に証明出来る。

（13）は
$$\varphi_\infty(\lambda)=\cdots\cdots 0,1,0\quad 0,\cdots\cdots$$
$$\varphi(\lambda)=\cdots\cdots\bar{\alpha}_1,1,\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots$$
なることより明らかである。

（定理2）により $F_\infty^*(x)$ が最も安定であり，$F_\rho^*(x)$ は定常と云ふものの一寸した擾乱により定常性が破れて $F_\infty^*(x)$ に *tend* することが現はれる。又任意の連続な分布の無限回 *convolution*。即ち極限法則として $F_\infty^*(x)$ が得られる事が分る。即ち連続分布に於ては，

$$|\varphi(\lambda)|<\varphi(0)=1\qquad \lambda\neq 0$$

なることが云へるからである。

又 $|\varphi(\lambda)|=1\qquad \lambda\neq 0$

なる場合の分布も $F_\rho^*(x)$ に類似の性質を有するが，之等については省略する。

（附記）

週期分布の例としては前にも述べたが以上の事から簡単に分る例としては，

（1）骰子を何個か振った場合の目の総和が6を *mod* として同じ確率を取ることは

$$F_6^*(x)*F_6^*(x)=F_6^*(x)$$

なることにより明らかである。

（2）ルーレットが起点の位置に無関係なることは

$$F_\infty^*(x) * F_\infty^*(x) = F_\infty^*(x)$$

なることより明らかであろう。

(3) *Fourier* 理に於ける定常熱傳導の問題は熱の移動の連続性より $F_\infty^*(x)$ であることは容易に分ることである。