124. 一つの直交多項式と其の應用に就て

梯　鉄次郎（1948. 10. 15）

§1. 多項式 $P_m^{(n)}(x)$

多項式 $P_m^{(n)}(x)$ を次式によつて定義する. 即ち

$m=0, 1, 2, \cdots\cdots n$ に就て,

$$P_m^{(n)}(x)=\frac{1}{m!}\Delta^m\left[\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\mu)\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\overline{n+1+\mu})\right]\cdots\cdots\cdots(1)$$

但し $P_0^{(n)}(x)=1$

とする。茲に $\Delta f(x)$ は $\{f(x+1)-f(x)\}$ を表はすものとする.

此の定義より $P_m^{(n)}(x)$ を計算すれば,

$$P_m^{(n)}(x)=\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\overline{n-\mu})+m^2x\prod_{\mu=0}^{m-2}(x-\overline{n-\mu})+\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)^2(x-1)\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\overline{n-\mu})+$$

$$\cdots\cdots+\left(\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-\overline{\nu-1})}{\nu!}\right)^2\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(x-\mu)\prod_{\mu=0}^{m-\nu-1}(x-\overline{n-\mu})+\cdots\cdots$$

$$+m^2\prod_{\mu=0}^{m-2}(x-\mu)\cdot(x-n)+\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\mu)\qquad\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる.

(2)より直ちに分る性質として $P_m^{(n)}(x)$ の最高次の係数即ち m 次の係数は

$$1+({}_mC_1)^2+({}_mC_2)^2+\cdots\cdots+({}_mC_m)^2=\frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

となる。又 (2) に於て $x=0.\ x=n$ と置けば

$$P_m^{(n)}(0)=(-1)^m\prod_{\mu=0}^{m-1}(n-\mu)$$

$$P_m^{(n)}(n) = \prod_{\mu=0}^{m-1}(n-\mu)$$

となる。

$m = 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4$ に於ける $P_m^{(n)}(x)$ の計算結果を例示すれば

$$P_0^{(n)}(x) = 1$$
$$P_2^{(n)}(x) = 2x - 6$$
$$P_2^{(n)}(x) = 6x^2 - 6nx + n(n-1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$
$$P_3^{(n)}(x) = 20x^3 - 30nx^2 + 2(6n^2-3n+2)x - n(n-1)(n-2)$$
$$P_3^{(n)}(x) = 70x^4 - 140nx^3 + 10(4n^2-3n+5)x^2 - 10n(2n^2-3n+5)x + n(n-1)(n-2)(n-3)$$

§2. $P_m^{(n)}(x)$ の直交性

$x = 0, 1, 2, \cdots, n$ に於て 1づつ飛躍のある階段函数を $\mu(x)$ とする。即ち

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i \quad m \leqq x < m+1 \qquad \text{ここに } A_i = 1$$

とする。此の $\mu(x)$ を用ひて

$$\int_0^n f(x)g(x)\,d\mu(x)$$

なる場合 $f(x)$ と $g(x)$ の直交を定義する。

此の定義に於て、$P_m^{(n)}(x)$ $m = 0, 1, 2, \cdots, n$ は直交函数系を作る。

之を証明するには

$$\int_0^n x^\nu P_m^{(n)}(x)\,d\mu(x) = 0, \quad \nu < m \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

を証明すれば充分である。

$P_m^{(n)}(x) = \Delta^m Q_m(x)$ と置けば、

$$\int_0^n x^\nu p_m^{(n)}(x)\,d\mu(x) = \Big[x^\nu \Delta^{m-1} Q_m(x) - \Delta x^\nu \Delta^{m-2} Q_m(x+1) + \Delta^2 x^\nu \Delta^{m-3} Q_m(x+2) - \cdots\cdots + (-1)^\nu \Delta^\nu x^\nu \Delta^{m-\nu-1} Q_m(x+\nu)\Big]_0^{n+1}$$

となり．又 $\left[\Delta^{m-\mu-1}Q_m(x+\mu)\right]_{x=0}^{x=n+1}=0 \quad \mu\leqq m$
であるから，結局(Δ)が証明された。即ち $P_m^{(n)}(x)$ は直交函数系を作る。

又
$$\int_0^n\left[P_m^{(n)}(x)\right]^2d\mu(x)=\int_0^n\left[\Delta^mQ_m(x)\right]^2d\mu(x)=(-1)\int_0^n\Delta^{m+1}Q_m(x)\Delta^{m-1}Q_m(x+1)d\mu(x)$$
$$=(-1)^m\int_0^n\Delta^{2m}Q_m(x)\cdot Q_m(x+m)d\mu(x).$$
$$=(-1)^m\frac{(2m)!}{m!}\int_0^n Q_m(x+m)d\mu(x)$$

又
$$\int_0^n Q_m(x+m)d\mu(x)=\frac{1}{m!}\int_0^n\prod_{\mu=0}^{m-1}(x+m-\mu)\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-n+\mu)d\mu(x)$$
$$=\frac{-m}{(m+1)!}\int_0^n\prod_{\mu=0}^{m}(x+m-\mu)\prod_{\mu=0}^{m-2}(x-n+\mu-1)d\mu(x)$$
$$=\frac{(-1)^m m!}{(2m)!}\int_0^n\prod_{\mu=0}^{2m-1}(x+m-\mu)d\mu(x)$$
$$=\frac{(-1)^m m!}{(2m+1)!}\left[\prod_{\mu=0}^{2m}(x+m-\mu)\right]_0^{n+1}=\frac{(-1)^m m!}{(2m+1)!}\prod_{\mu=0}^{2m}(n+m+1-\mu)$$

故に
$$\int_0^n\left[P_m^{(n)}(x)\right]^2d\mu(x)=\frac{1}{2m+1}\prod_{\mu=0}^{2m}(n+m-1-\mu)$$
となる。

即ち，以上の結果をまとめれば，
$$\int^n P_m^{(n)}(x)P_{m'}^{(n)}(x)d\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2m+1}\displaystyle\prod_{\mu=0}^{2m}(n+m-1-\mu) & m=m'\\ 0 & m\neq m'\end{cases}\quad\cdots\cdots(5)$$
となる。

§3. 循環公式と階差方程式

$P_m^{(n)}(x)$ は次の循環公式を満足する．即ち
$$(m+1)P_{m+1}^{(n)}(x)-(2n+1)(2x-n)P_m^{(n)}(x)+m(n+m+1)(n-\overline{m-1})P_{m-1}^{(n)}(x)=0\quad\cdots\cdots(6)$$

証明 ──

$P_{m+1}^{(n)}(x)$ と $P_m^{(n)}(x)$ の最高次の係数は前に述べた如く夫々

$$\frac{(2m+2)!}{[(m+1)!]^2} \quad \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$ となるから

$$P_{m+1}^{(n)}(x)-\frac{2(2m+1)}{m+1}xP_m^{(n)}(x)=\alpha P_m^{(n)}(x)+\beta P_{m-1}^{(n)}(x)+R(x)$$

と書ける。ここに α,β は常数 $R(x)$ は高々 $(m-2)$ 次の多項式である。

ここで $R(x)$ を両辺に掛けて前述の Stieltjes 積分を施せば

$$\int_0^n [R(x)]^2 d\mu(x)=0$$

となり $R(x_i)=0$ $x_i=0,1,2,\cdots\cdots,n$ となる。然るに $R(x)$ の次数は n より小であるから、$R(x)\equiv 0$ でなくてはならない。又 $x=0$, $x=n$ と置き、α,β の値を求めれば、

$$\begin{cases}\alpha= \dfrac{2m+1}{m+1}n \\ \beta=\dfrac{-m(n-\overline{m-1})(n+m+1)}{m+1}\end{cases}$$

を得る。

此の項を上式に代入すれば(8)を得る。

次に又 $P_m^{(n)}(x)$ は次の階差方程式を満足する。

即ち $P_m^{(n)}(x)$ は階差方程式

$$(x-\overline{n-2})(x+2)\Delta^2 y(x)+[2x-\overline{n-2+m(m+1)}]\Delta y(x)-m(m+1)y(x)=0 \quad \cdots(7)$$

の解である。

証明一

$$Q_m(x)=\frac{1}{m!}\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\mu)\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\overline{n+1+\alpha})$$ と置けば、

$$\Delta Q_m(x)=\Delta\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\mu)\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\overline{n+\mu})+\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\mu)\Delta\prod_{\mu=0}^{m-1}(x-\overline{\alpha+1+\mu})$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\frac{Q_m(x)}{(x-\overline{n+m})}\left(\frac{x-n}{x-\overline{n-1}}+1\right)$$

即ち $(x-\overline{n+m})(x-\overline{n-1})\Delta Q_m(x)=\dfrac{1}{(m-1)!}(2x-\overline{n+m-1})Q_m(x)$

此の両辺に Δ^{m+1} を施せば

$$(x-\overline{n+m})(x-\overline{n-1})\Delta^{m+2}Q_m(x)+(m+1)(2x-\overline{n-2})\Delta^{m+1}Q_m(x)+m(m+1)$$

$$\Delta^m Q_m(x)=\frac{1}{(m-1)}(2x-\overline{n-m-3})\Delta^{m+1}Q_m(x)+\frac{2}{(m-1)!}\Delta^m Q_m^{(n)}(x)$$

之を整頓して

$$(x-\overline{n-1})(x+2)\Delta^2 P_m^{(n)}(x)+\left[2x-\overline{n-2+m(m+1)}\right]\Delta P_m^{(n)}(x)-m(m+1)P_m^{(n)}(x)=0$$

即ち $P_m^{(n)}(x)$ は（7）の解である事が分る.

§4. 最小自乗法及補間法に於ける $P_m^{(n)}(x)$ の應用

ここで最小自乗法と云ふのは $f(x)$ を $\sum_{m=0}^{k} a_m P_m^{(n)}(x)$: $k \leqq n$ にて近似し

$$I=\int_0^n\left[f(x)-\sum_{m=0}^{k} a_m P_m^{(n)}(x)\right]^2 d\mu(x)=min \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

なる様に系数 a_m を定めるものとする.

$P_m^{(n)}(x)$ の直交性を用ひれば（8）は

$$I=\int_0^n[f(x)]^2 d\mu(x)+\sum_{m=0}^{k} a_m^2\int_0^n[P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x)-2\sum_{m=0}^{k} a_m\int_0^n f(x)P_m^{(n)}(x)d\mu(x)$$

$$=\int_0^n[f(x)]^2 d\mu(x)+\lambda_m\sum_{m=0}^{k}\left(a_m-\frac{\alpha_m}{\lambda_m}\right)^2-\sum_{m=0}^{k}\frac{\alpha_m^2}{\lambda_m}$$

となる。こゝに

$$\lambda_m=\int_0^n[P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x)$$

$$\alpha_m=\int_0^n f(x)P_m^{(n)}(x)d\mu(x)$$

とする。

故に I を min にする様な a_m の値は

$$a_m=\frac{\alpha_m}{\lambda_m}=\frac{\int_0^n f(x)P_m^{(n)}(x)d\mu(x)}{\int_0^n[P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x)} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

となる。（9）は又（5）を用ひれば

$$a_m=\frac{2m+1}{\prod_{\mu=0}^{2m}(n+m-1-\mu)}\sum_{x_i=0}^{n} f(x_i)P_m^{(n)}(x_i) \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

に計算される。即ち係数は積分を行ふ必要がなく 四則のみにより計算される.

又(8)に於て $k=n$ とすれば $\sum_{m=0}^{n} a_m P_n^{(m)}(x)$ は明らかに $f(x)$ の補間多項式となり $J=0$ となる。此の場合補間多項式は最小自乗法の特殊な場合となり、其の係数は又(9)(10)で表はされる事は明らかである。即ち $P_n^{(m)}(x)$ は等間隔補間にも応用される分である。

又 $f(x)-\sum_{n=0}^{n} a_m P_m(x) = R_n(x)$

とすれば 補間法に於てよく知られてゐる様に

$$R_n(x)=\frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ ,\ 0\leqq\xi\leqq a \quad \cdots\cdots(11)$$

である。関係式(8)・(11)を用ひれば 最小自乗法の誤差が計算出来る。即ち $k<n$ なる k に対して、

$$R_k(x)=f(x)-\sum_{m=0}^{k} a_m P_m^{(n)}(x)$$
$$=\sum_{m=k+1}^{n} a_m P_m^{(n)}(x)+\frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad \cdots\cdots(12)$$

となる。 (23. 8. 5)