127. (ℓ)空間の特性づけ

(東北大) 中村正弘 (1948.10.29)

Schurのよく知られた定理によつて、絶對收斂級數の造る空間(ℓ)では、弱收斂と強收斂とが一致致します。この性質は無限次元の空間としては極めて際立つた(ℓ)の性質ですから、この点だけで(ℓ)を特性づけたいと思いましたが、Ｂ空間と假定しただけではうまく參りませんでした。が、Ｂ束とすると、次の樣に解決することができる樣であります。

定理 無限次元の可分Ｂ束に於て弱收斂が強收斂と一致するならば、それは(ℓ)と同型である。

証明： 小笠原氏のＫ束に關する次の三つの定理を使用致します。

I. Ｂ束が弱列完備であればＫ空間である。

II. Ｋ空間の任意の区間は弱コンパクトである。

III 区間がコンパクトな可分Ｂ束は数列空間である。

この三定理のうちIとIIは本誌240号の小笠原氏の論文中に、IIIは広島文理大理科報告第11号にございます。(又、小生の本誌第6号の談話59を參照して頂ければ幸いと存じます)。

以上の小笠原氏の三定理と定理の假定とから、与えられたＢ束が可附番無限ケの座標の上に組み立てられたある種のＢ束となつていることは明かです。問題はノルムをつけかえて、同等なノルムで(ℓ)となし得るかにかゝります。或は角谷先生のAL空間の表現を用いればよいわけです。

そのために共軛空間の單位球の正部分で弱デンスな可附番列を取り $\{f_i\}$ とします。そして $f=\sum \frac{1}{2^i} f_i$ と置けば、$f \geqq 0$ となります。$\|f_i\|=1$ とすれば、

$\|f\|$ も1となります。Eに新しいノルムを $|x|=f(|x|)$ で定義すれば、この新しいノルムによつてEがAL空間となることは明かです。このとき恒等変換によつて Eが同型に写像されることは 次のようにして明かとなります。もしもそうでないならば、$\|x_n\|=1$ で $x_n \to 0$（弱）となるものが存在するはずですが、これは仮定上不可能だからです。

従つて、残るところは、この新しいノルムによつてEが完備となつていることをいえば充分です。今新ノルムについて $\{x_n\}$ が基本列であつたとします。ノルムの定義によつて、$|x_n - x_m| \to 0$（弱）となります。ところが定理の仮定から、これは $|x_n - x_m| \to 0$（強）で $\||x_n - x_m|\| = \|x_n - x_m\|$ ですから x_n の極限 x が存在して $\|x_n - x\| \to 0$ となります。これで証明を終ります。