132. ポテンシヤル論ニ関スルMuntzノ定理

(阪大) 下田節郎 (1948.11.30)

"函数方程式"第五・六号(昭和14年)ニ 福原先生ガ, Müntz ノ定理ノ證明ニツイテ述ベラレテ居リマスガ. 之ニハ A. Korn ノ流儀ノ證明モ可能デスカラ コヽニ紹介致シマス.

此方法ナラバ 2次元ハモトヨリ 一般ニ $n\geqq 2$ナルn次元ニ於テモ全ク同一形式デ証明出来マスカラ. 以下此様ナ一般ナ一般次元ニ於ケル定理ヲ取扱フ事ニシマス。

nハ常ニ$\geqq 2$ナル次元数ヲ示ス事ニシマス.

§1. 記法・記号ノ説明.

n次元ユークリッド空間ノ点ヲ次ノ如クーツノ文字デ表ス事ニシマス.

$$x=(x_1,\cdots\cdots,x_n)$$

x_iハ点xノi番目ノ座標成分デス.

$$\frac{\partial^m}{\partial E_1 \partial E_2 \cdots\cdots \partial E_m} u(x)$$

ノ如キ記号ガ用ヒラレマス．

フツウニ知ラレテ居ル

$$u(x) \in C^{(m)}(G) \qquad G \text{ ハ領域}$$

ト言フ事ハ 如何ニ任意ニ m 個ノ単位 vector $E_1, \cdots\cdots E_m$ ヲ定メテモ（各点デ次ノ微分ガ可能デ）

$$\frac{\partial^m}{\partial E_1 \partial E_2 \cdots\cdots \partial E_m} u(x) \in C(G)$$

デアル．トイフ事ト一致シマス．

猶

$$D_m \; u(x)$$

ナル記号ハ、微分方向 $E_1, \cdots\cdots E_m$ ヲ明示スル必要ノナイトキニ 漠然ト m 階ノ微分 導函数ヲ示ストキニ利用シマス．

n 次元ニ於ケル Laplace ノ方程式 $\Delta u = 0$ ニ対スル elementary solution ヲ次ノ様ナ記号デ示シマス．

$$\gamma(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)|x-\xi|^{n-2}} & (n \geq 3 \text{ ノトキニ}) \\ \log \dfrac{1}{|x-\xi|} & (n = 2 \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

即チ x, ξ ハ何レモ n 次元空間ノ点デアッテ 右辺ハ此函数ノ内容ヲ書イタモノデス．

此様ニ書クト此函数ハ次元ニ對シテ統一サレタ形式ニ表ハサレテ居マセンガ之ヲ x ニツイテ 又ハ ξ ニツイテ微分シタモノハ統一サレタ形式デ表サレマス．

即チ x ニツイテノ微分ヲ書イテ見マスト．—

$$\frac{\partial}{\partial E} \gamma(x, \xi) = -\frac{\cos(E, x-\xi)}{|x-\xi|^{n-1}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \gamma(x, \xi) = \frac{n \cos(E_1, x-\xi) \cos(E_2, x-\xi) - \cos(E_1, E_2)}{|x-\xi|^n}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} \gamma(x, \xi) = -\frac{n(n+2) \cos(E_1, x-\xi) \cos(E_2, x-\xi) \cos(E_3, x-\xi)}{|x-\xi|^{n+1}}$$

§1. 記法・記号ノ説明

n次元ユークリッド空間ノ點ヲ次ノ如クーツノ文字デ表ス事ニシマス.

$$x=(x_1 \cdots\cdots, x_n)$$

x_i ハ點xノi番目ノ座標成分デス.

此空間ヲ Vektorraum ノ様ニモ考ヘテ 次ノ様ナ書キ方ヲモ利用シマス;

$$x=(x_1, \cdots\cdots, x_n) \qquad y=(y_1, \cdots\cdots, y_n)$$

ニ對シ

$$x-y=(x_1-y_1, x_2-y_2, \cdots\cdots, x_n-y_n)$$

二点 x, y 間ノユークリッド距離ヲ次ノ様ナ記号デ示シマス:

$$(x-y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

函数 $u(x)$ ニ対スル Laplacian ノ意味ハ勿論次ノ通リデス:

$$\Delta u(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)$$

n次元ノ領域Gニ於テ定義サレテ $u(x)\in C''(G)$ 且ツ $\Delta u(x)=0$.

for all $x\in G$ ナル函数 $u(x)$ ヲヤハリ harmonic デアルト言フ事ニシマス。

偏微分ニツイテハ, 次ノ様ナ記号ヲ用ヒマス:

$$\frac{\partial}{\partial E}u(x)$$

コヽニEハ或定マツタ単位 vector (長サ 1 ノ vector) ヲ意味シ.

$$\frac{\partial}{\partial E}u(x)=\lim_{\substack{n\to 0\\ n>0}}\frac{u(x+\eta E)-u(x)}{n}$$

右辺ノ limit ガ存在スルトキ, ソレヲ左辺ノ記号デ表スワケデス.

之ガxニ於ケルE方向デノ微分デスガ, ツイデ導函数 $\frac{\partial}{\partial E}u(x)$ ニツイテ

$$\frac{\partial}{\partial E'}\left(\frac{\partial}{\partial E}u(x)\right)=\frac{\partial^2}{\partial E'\partial E}u(x)$$

ト定義シマス. E' ハヤハリ或定ツタ單位 vector デ 右辺ノ記号ノ意味ガ左辺ノ様ナモノデアルワケデス.

斯クシテ順次ニ高マリ 一般ニ m 階ノ微分・導函数トシテ

$$+\frac{n(\cos(E_1, E_2)\cos(E_3, x-\xi)+\cdots\cdots\cdots\cdots)}{|x-\xi|^{n+1}}$$

等々（最後ノ省略シテアル個処ハ E_1, E_2, E_3 ヲ cyclic ニ書キカヘテ得ラレルミツノ項ノ和ニナル様ニ補ヘバヨイ）.

$\cos(E, x-\xi)$ ハ二ツノ vector E, $x-\xi$（即チ $\overrightarrow{\xi x}$）ノ成ス角ノ cosine ヲ $\cos(E_1, E_2)$ ハ vector E_1, E_2 ノナス角ノ cosine ヲ表シマス.

n 次元ニ於ケル積分モ、例ヘバ次ノ様ニ略記シマス：

$$\int_G f(x)\,dx \qquad \int_G \gamma(x,\xi)\,d\xi$$

猶

$$\left|\frac{\partial}{\partial E}\gamma(x,\xi)\right| \leq \frac{1}{|x-\xi|^{n-1}}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial E_1\partial E_2}\gamma(x,\xi)\right| \leq \frac{n+1}{|x-\xi|^{n}}$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial E_1\partial E_2\partial E_3}\gamma(x,\xi)\right| \leq \frac{n^2+5n}{|x-\xi|^{n+1}}$$

ナル事ヲ注意ッカヒマス.

§2. 球ニ対スル Green ノ函数

n 次元ニ於テ 点 x_0 ヲ中心トスル半径 $R>0$ ノ n 次元球（hypersphere）

$$K=\{x \mid |x-x_0|<R\}$$

ニ対スル Green ノ函数ヲ $K(x,\xi)$ ニテ表ス事ニシマス. 之ハ

$$K(x,\xi)=\gamma(x,\xi)+v(x,\xi)$$

ノ如キ形ノ函数デ 此 $v(x,\xi)$ ガ 次ノ様ナ性質ヲモツモノデアリマス.

(0) $v(x,\xi)$ ハスベテノ $x\in\overline{K}$, $\xi\in K$ ニ対シテ定義サレテ居ル.

(1) $\xi\in K$ ヲ固定シタトキ x ガ球ノ境界 S 上ニアレバ

$$v(x,\xi)=-\gamma(x,\xi)$$

(2) $\xi\in K$ ヲ固定シタトキ、x ノ函数トシテ

$$v(x,\xi)\in C(\overline{K}) \text{ 且ツ } \in C''(K)$$

(3) $\xi\in K$ ヲ固定シタトキ x ノ函数トシテ K ニ於テ $\Delta u=0$ ノ解デ

アル（即チ harmonic デアル）

之ハ Green ノ函数ノ定義其儘デスガ，球ノ場合ニハ具体的ナ expression ガ知ラレテ居テ，且ツ $K(x,\xi)$ ハ x,ξ ニ對シテ対称ニナリマスカラ．$v(x,\xi)$ ハスベテノ $x\in K$, $\xi\in\bar{K}$ ニ對シテ定ギサレテアルト考ヘテモヨイ事ニナリマス．

蛇足乍ラ，其 expression トイフノハ次ノ如キモノデアリマス。一般ニ $x\neq x_0$ ナル点 x ニ對シ ソレノ球Kニ関スル鏡像点ヲ x^σ ニテ表ス事ニシマスト

$$x^\sigma - x_0 = \frac{R^2}{|x-x_0|^2}(x-x_0)$$

之ヲ用ヒテ

$$v(x,\xi)=\begin{cases} -\left(\dfrac{R}{|x-x_0|}\right)^{n-2}\gamma(x^\sigma,\xi) & (n\geq 3\text{ノトキ}) \\ -\left(\log\dfrac{R}{|x-x_0|}+\gamma(x^\sigma-\xi)\right) & (n=2\text{ノトキ}) \end{cases}$$

$\gamma(x,\xi)$ ノ式ヲ代入シテ書直スト．

$$v(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{1}{n-2}\left(\dfrac{R}{|x-x_0|\cdot|x^\sigma-\xi|}\right)^{n-2} & (n\geq 3) \\ -\log\dfrac{R}{|x-x_0|\cdot|x^\sigma-\xi|} & (n=2) \end{cases}$$

コレラノ expression ハ $x=x_0$ ノトキニハ都合ガワルイ．

x,ξ ガ共ニ x_0 ト異ルトキハ，$\Delta x_0\xi x^\sigma \backsim \Delta x_0 x\xi^\sigma$ ナル事カラ，

$$|x-x_0|\cdot|x^\sigma-\xi|=|\xi-x_0|\cdot|x-\xi^\sigma|$$

カラ，

$$|x-x_0|\cdot|x^\sigma-\xi|=|\xi-x_0|\cdot|x-\xi^\sigma|$$

ヲ得マスカラ，$v(x,\xi)$ ハ次ノ様ニモ書カレマス．$\gamma(x,\xi)$ ヲ利用シテ

$$v(x,\xi)=\begin{cases} -\left(\dfrac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\gamma(x,\xi^\sigma) & (n\geq 3) \\ -\left(\log\dfrac{R}{|\xi-x_0|}+\gamma(x,\xi^\sigma)\right) & (n=2) \end{cases}$$

此 expression ハ $\xi=x_0$ ノトキハ都合ガワルイデスガ $\xi=x_0$ ノトキハ

$$v(x, x_0)=\begin{cases} -\dfrac{1}{n-2} \dfrac{1}{R^{n-2}} & (n \geq 3) \\ -\log \dfrac{1}{R} & (n=2) \end{cases}$$

トナル事ガ第二ノ *expression* カラ得ラレマス．コレラハ x ニ關係シナイ常數デアリマス．

第三ノ *expression* ハ $v(x, \xi)$ ノ x ニ關スル微分ヲ書クトキニ都合ガ宜シイ．卽チ

$$\frac{\partial}{\partial E} v(x, \xi)=-\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2} \frac{\partial}{\partial E} \gamma(x, \xi^{\sigma})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} v(x, \xi)=-\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \gamma(x, \xi^{\sigma})$$

軍々　從ツテ $\xi \neq x_0$ ナル限リ

$$\left|\frac{\partial}{\partial E} v(x, \xi)\right| \leq\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x-\xi^{\sigma}|^{n-1}}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} v(x, \xi)\right| \leq\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2} \frac{n+1}{|x-\xi^{\sigma}|^{n}}$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} v(x, \xi)\right| \leq\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2} \frac{n^2+5n}{|x-\xi^{\sigma}|^{n+2}}$$

勿論 $\xi=x_0$ ナラバ．コレラノ *derivative* ノ値ハ零デアリマス．

一般ニ $\xi \in K$ ヲ固定スレバ．$v(x, \xi)$ ハ x ノ函數トシテ K ニ於テ *harmonic* デスカラ．K 内デ x ニツイテ何回デモ微分可能デ x ニツイテ m 回微分シタ事ヲ D_m ニテ表セバ．(x, ξ) ノ函數トシテ

$$\left.\begin{array}{r} v(x, \xi) \\ D_m v(x, \xi) \end{array}\right\} \in C\cdot(\bar{K} \times K)$$

トナリ．又 G ヲ $\bar{G}=K$ ナル可測集合 $f(\xi)$ ヲ G ニ於テ定ギサレタ有界可測ナ函數トスルトキ　$x \in K$ ニ對シ

$$\int_G v(x, \xi) f(\xi) d\xi . \quad \int_G D_m v(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

ノ如キ積分ガ可能デ　$x \in K$ ノトキ．

$$D_m \int_G v(x,\xi) f(\xi) d\xi = \int_G D_m v(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

トナル事モヨク知ラレテ居リマス。即チ

$$w(x) = \int_G v(x,\xi) f(\xi) d\xi \in C^{(\infty)}(K)$$

デアリマス。

此xニツキ微分シタ導函数 $D_m v(x,\xi)$ ハ $x \in K$ ヲ固定シタトキ、ξ ノ函数トシテ　Gニ於テ绝和トナル事モ直チニ分ル事ガアリマス。

一般ノn次元ノ場合デモ

$$U(x) = \int_K K(x,\xi) d\xi = \frac{\omega_n}{2n}\left\{ R^2 - |x - x_0|^2 \right\}$$

ガ $\bar{K}$ デ連続 K内テ二回連続微分可能デ　$\Delta U = -\omega_n$　且ツ K ノ境界デ$=0$ トナル *Poisson* 方程式ノ解ナル事ハ　割合簡単ナク確メラレマス。ω_n ハ常ニn次元ノ單位球（半径$=1$ナル球）ノ表面積ヲ表ス恒数トシマス。

猶、$x \in \bar{K}$ ノトキ

$$\int_K \gamma(x,\xi) d\xi = \frac{\omega_n}{n}\left\{ R^n \varphi(R) + \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{2} \right\}$$

從ツテ

$$\int_K v(x,\xi) d\xi = \int_K K(x,\xi) d\xi - \int_K \gamma(x,\xi) d\xi \equiv \frac{\omega_n R^n \varphi(R)}{n}$$

之ハ常数デアリマス。但シ $\varphi(r)$ ハ $\varphi(|x-\xi|) = \gamma(x,\xi)$ デアル様ナ函数トシマス。

コレカラ　$x \in K$ ノトキ

$$\frac{\partial}{\partial E}\int_K K(x,\xi) d\xi = \frac{\partial}{\partial E}\int_K \gamma(x,\xi) d\xi = -\frac{\omega_n |x - x_0| \cos(E, x - x_0)}{n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2}\int_K K(x,\xi) d\xi = \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2}\int_K \gamma(x,\xi) d\xi \equiv -\frac{\omega_n \cos(E_1, E_2)}{n}$$

ナル事ガ分リマス。二回微分シタ方ハ *constant* デアリマス。

§3. 問題トスル定理

ソレハ次ノ如キモノデアリマス。

指数α $(0<\alpha<1)$ニ関シテ $f(\xi)$ガKニ於テ *Hölderienne* ナラバ，

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_K K(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

ニツキ，

(1) $\|u\| \leq \frac{R^2}{2n}\|f\|$ (2) $\|D_1 u\| \leq 2R\|f\|$,

(3) $\|D_2 u\| \leq \frac{2(n+1)}{\alpha}R^\alpha H_\alpha(f) + \frac{\|f\|}{n}$,

(4) $D_2 u$ ハ，f ト同一指数αニ関シテ，K ニ於テ *Hölderienne* デアツテ，$D_2 u$，f ノ α-*Hölder-constants* ノ間ニハ 次ノ如キ不等式ガ成立ツ。

$$H_\alpha(D_2 u) \leq M_{\alpha,n}\, H_\alpha(f)$$

コヽニ $M_{\alpha.n}$ ハα及ビnノミニ関係シテ定メラレル常数デアツテ，

例ヘバ

$$M_{\alpha.n} = \frac{2^\alpha+1}{2^\alpha-1}\left\{\frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2+5n)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha}\right) + \frac{1}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)2^n\right\}$$

ト取ル事ガ出来ル，但シ 例ヘバ fニツイテ言フト $\|f\|$，$H_\alpha(f)$ ノ意味ハ

$$\|f\| = \underset{x \in K}{\mathrm{0b.g_n.}}\ |f(x)|$$

$H_\alpha(f)=$ 指数αニ関スルfノ *Hölder-constant* ヲ表スモノトスル。

猶，$f(\xi)$ガKニ於テ *Hölderienne* ナラバ $u(x)$ ハK内デ二階微分可能デ，

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2}u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\left\{\int_K \{f(\xi)-f(x)\}\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2}K(x,\xi)d\xi + f(x)\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2}\int_K K(x,\xi)d\xi\right\}$$

トナル事ハ分ツテ居ルモノトシマス。

証明ノウチ (1)ニ対スルモノハ易シイ。

即チ $K(x,\xi) \geq 0$ ヲ利用シテ

$$|u(x)| \leqq \frac{\|f\|}{\omega_n}\int_K K(x,\xi)d\xi = \frac{\|f\|}{a_n}\cdot\frac{\omega_n}{2n}\left\{R^2-|x-x_0|^2\right\}$$
$$\leqq \frac{\|f\|R^2}{2n}$$

(2).(3) ノ証明ニハ次ノ lemma ヲ用ヒル事ガ有効デアル.

Lemma 1: $x \in \bar{K}$, $\xi \in K$, $\xi \neq x_0$ ナルトキ $\alpha \geqq -2$ ナラバ.

$$\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{1}{|x-\xi^\sigma|^{n+\alpha}} \leqq \frac{1}{|x-\xi|^{n+\alpha}}$$

之ハ $\Delta x_0 x \xi$ ニ於ケル初等キカ学的ナ考察カラ.

$$|x-\xi^\sigma| \geqq |x-\xi|\frac{R}{|\xi-x_0|}$$

ヲ得ルカラ $\alpha+2 \geqq 0$ 及ビ $n+\alpha \geqq 0$ ナル事ニ注目シテ.

$$\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{1}{|x-\xi^\sigma|^{n+2}} \leqq \left(\frac{P}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{1}{|x-\xi|^{n+\alpha}}\left(\frac{|\xi-x_0|}{R}\right)^{n+\alpha}$$

$$=\left(\frac{|\xi-x_0|}{R}\right)^{\alpha+2}\frac{1}{|x-\xi|^{n+\alpha}} \leqq \frac{1}{|x-\xi|^{n+\alpha}}$$

デ正シイ事ガ分ル.

(2) ノ証明. $\quad D_i u(x) = -\dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_K D_i K(x,\xi)f(\xi)d\xi$

$$=-\frac{1}{\omega_n}\left\{\int_K D_i \gamma(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int_K D_i v(x,\xi)f(\xi)d\xi\right\}$$

デアルカラ

$$|D_i u(x)| \leqq \frac{\|f\|}{\omega_n}\left\{\int_K |D_i\gamma(x,\xi)|d\xi + \int_K |D_i v(x,\xi)|d\xi\right\}$$

$$\leqq \frac{\|f\|}{\omega_n}\left\{\int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-1}} + \int_K \left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{d\xi}{|x-\xi^\sigma|^{n-1}}\right\}$$

$$\leqq \frac{\|f\|}{\omega_n}\left\{\int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-1}} + \int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-1}}\right\} \leqq \frac{2\|f\|}{\omega_n}\int_K \frac{d\xi}{|x_0-\xi|^{n-1}}$$

$$=\frac{2\|f\|}{\omega_n}\cdot\omega_n\int_0^R d\rho = 2\|f\|R$$

(3) ノ証明： 既ニ得タ式カラ

$$\left|D_2u(x)\right| \leq \frac{1}{\omega_n}\left\{\int_K\left|f(\xi)-f(x)\right|\cdot\left|D_2\gamma(x,\xi)\right|d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_K\left|f(\xi)-f(x)\right|\cdot\left|D_2v(x,\xi)\right|d\xi+\frac{\omega_n\|f\|}{n}\right\}$$

$$\leq \frac{(n+1)H\alpha(f)}{\omega_n}\left\{\int_K\frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}}+\int_K\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{|x-\xi|^{\alpha}}{|x-\xi^{\sigma}|^{n}}d\xi\right\}+\frac{\|f\|}{n}$$

$$\leq \frac{(n+1)H\alpha(f)}{\omega_n}\cdot 2\int_K\frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}}+\frac{\|f\|}{n}$$

$$\leq \frac{2(n+1)H\alpha(f)}{\omega_n}\int_K\frac{d\xi}{|x_0-\xi|^{n-\alpha}}+\frac{\|f\|}{n}$$

$$=\frac{2(n+1)H\alpha(f)}{\omega_n}\cdot\omega_n\int_0^R\rho^{\alpha-1}d\rho+\frac{\|f\|}{n}$$

$$=\frac{2(n+1)H\alpha(f)}{\alpha}R^{\alpha}+\frac{\|f\|}{n}$$

§4. (4) ノ証明

定理ノウチ一番肝心ナ(4)ノ部分ノ証明ヲ以下順次ニ展開シマス. E, E'ハキメテオイテ $\frac{\partial^2}{\partial E\partial E'}$ ヲ單ニ D_2 ニテ示ス事ニシマス。

前ニ得タ $D_2u(x)$ ノ式ヲ用ヒテ, $p, q \in K$ ノトキ

$$\left|D_2u(p)-D_2u(q)\right| \leq \frac{1}{\omega_n}\left\{\left|\left[\int_K\{f(\xi)-f(x)\}D_2K(x,\xi)d\xi\right]_{x=q}^{x=p}\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{|f(p)-f(q)|\,\omega_n}{n}\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n}\left|\left[\quad\right]_{x=q}^{x=p}\right|+\frac{H\alpha(f)}{n}|p-q|^{\alpha}$$

即チ問題ハ

$$\left|\left[\quad\right]_{x=q}^{x=p}\right| \text{ ノ評価ニアル.}$$

ソレハ結局 $p \neq q$ トシテ

$$\left|\left[\quad\right]_{x=q}^{x=p}\right| \leq \text{何カ} \times |p-q|^{\alpha}$$

ノ如キ評価ヲ出シテ見レバヨイワケデアル。

$p \neq q$ トシテ p, q ノ中点ヲ X, X ヲ中心トスル半径 $|p-q|$ ノ球ヲ K' トスル。

$x \in K'$ ノトキ, 積分領域ヲ二ツニ分ケテ

$$\int_K \{f(\xi)-f(x)\} D_2 K(x,\xi) d\xi = \int_{K \frown K'} \{f(\xi)-f(x)\} D_2 K(x,\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{K-K'} \{f(\xi)-f(p)\} D_2 K(x,\xi) d\xi + \{f(p)-f(x)\} \int_{K-K'} D_2 K(x,\xi) d\xi$$

ト書カレル。故ニ

$$\left[\int_K \{f(\xi)-f(x)\} D_2 K(x,\xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p}$$

$$= \left[\int_{K \frown K'} \{f(\xi)-f(x)\} D_2 \gamma(x,\xi) d\xi \right]_{x=p}^{x=p} + \left[\int \{f(\xi)-f(x)\} D_2 v(d,\xi) \right]_{x=q}^{x=p} +$$

$$+ \left[\int_{K-K'} \{f(\xi)-f(p)\} D_2 \gamma(x,\xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} + \left[\int_{K-K'} \{f(\xi)-f(p)\} D_2 v(x,\xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} +$$

$$+ \{f(q)-f(p)\} \int_{K-K'} D_2 K(q,\xi) d\xi$$

此右辺ノ四ツノ $[\,.\,]_{x=q}^{x=p}$ ヲ順次ニ [1], [1′], [2], [2′] ニテ表シ 最後ノ項ヲ [3] トスル。

先ヅ

$$\left| \int_{K \frown K'} \{f(\xi)-f(x)\} D_2 \gamma(x,\xi) d\xi \right| \leq (n+1) H_\alpha(f) \int_{K'} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}}$$

$$= (n+1) H_\alpha(f) \int_{K'} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} = \omega_n (n+1) H_\alpha(f) \int_0^{|p-q|} \rho^{\alpha-1} d\rho$$

$$= \frac{\omega_n (n+1) H_\alpha(f)}{\alpha} |p-q|^\alpha$$

及ビ

$$\left|\int_{K\frown K'}\{f(\xi)-f(x)\}D_2\gamma(x,\xi)d\xi\right|\leq(n+1)H_\alpha(f)\int_{K-K'}\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{|x-\xi|^\alpha}{|x-\xi^*|^n}d\xi$$

$$\leq(n+1)H_\alpha(f)\int\frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}}\leq\frac{\omega_n(n+1)H_\alpha(f)}{\alpha}|p-q|^\alpha$$

ニヨリ

$$\left.\begin{array}{l}|[1]|\\|[1]|\end{array}\right\}\leq\frac{2\omega_n(n+1)H_\alpha(f)}{\alpha}|p-q|^\alpha$$

次ニ $x\in K'$ ノトキハ

$$D_m\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}\gamma(x,\xi)d\xi=\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}D_m\gamma(x,\xi)d\xi$$

デアルコトニ注意シテ $\overrightarrow{pq}$ 方向ノ單位 vector ヲ E ニテ表セバ,

$$|[2]|=\left|\int_0^{|p-q|}\frac{\partial}{\partial E}\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}D_2\gamma(p+SE,\xi)d\xi\,dS\right|$$

$$\leq\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}|f(\xi)-f(p)|\left|D_3\gamma(p+SE,\xi)\right|d\xi\,dS$$

$$\leq\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\left\{|f(\xi)-f(p+SE)|+|f(p+SE)-f(p)|\right\}\frac{n^2+5n}{|p+SE-\xi|^{n+1}}d\xi\,dS$$

$$\leq(n^2+5n)H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\frac{|p+SE-\xi|^\alpha+S^\alpha}{|p+SE-\xi|^{n+1}}d\xi\,dS$$

$$\leq(n^2+5n)H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\omega_n\int_{\frac{|p-q|}{2}}^{\infty}\frac{\rho^\alpha+S^\alpha}{\rho^2}d\rho\,dS$$

$$=\omega_n(n^2+5n)H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\left\{\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{|p-q|}{2}\right)^{\alpha-1}+S^\alpha\left(\frac{|p-q|}{2}\right)^{-1}\right\}dS$$

$$=\omega_n(n^2+5n)H_\alpha(f)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{2}{1+\alpha}\right)|p-q|^\alpha$$

又 $x\in K$ ナル限リ

$$D_m\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}v(x,\xi)d\xi=\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}D_m v(x,\xi)d\xi$$

デアルカラ.

$$|[2]|=\left|\int_0^{|p-q|}\frac{\partial}{\partial E}\int_{K-K'}\{f(\xi)-f(p)\}D_2 v(p+sE,\xi)d\xi\,ds\right|$$

$$\leqq(n^2+5n)H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\{|p+sE-\xi|^\alpha+s^\alpha\}\left(\frac{R}{|\xi-x_0|}\right)^{n-2}\frac{d\xi ds}{|p+sE-\xi|^{n+1}}$$

$$\leqq(n^2+5n)H_\alpha(f)\int_0^{|p-q|}\int_{K-K'}\frac{|p+sE-\xi|^\alpha+s^\alpha}{|p+sE-\xi|^{n+1}}d\xi ds$$

$$\leqq\omega_n(n^2+5n)H_\alpha(f)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{2}{1+\alpha}\right)|p-q|^\alpha$$

最後ニ

$$|[3]|=|f(q)-f(p)|\left|\int_{K-K'}D_2K(q.\xi)d\xi\right|$$

$$\leqq H_\alpha(f)|p-q|^\alpha\left|\int_{K-K'}D_2K(q.\xi)d\xi\right|$$

デアルカラ.

$$\left|\int_{K-K'}D_2K(q.\xi)d\xi\right|\leqq M$$

トナル様ナ. α, n ノミニ關シテ定メラル常數 M ノ取レル事ヲ示セバスベテガ完了スル訳デアルガ, ソレハ $\overline{K'}<K$ ナル場合ニハ極メテ容易デアル 即チ

$$\left|\int_{K-K'}D_2K(q,\xi)d\xi\right|=\left|\int_{K-K'}D_2\gamma(q.\xi)d\xi+\int_{K-K'}D_2v(q,\xi)d\xi\right|$$

$$=\left|D_2\int_K \gamma(q.\xi)d\xi - D_2\int_{K'}\gamma(q.\xi)d\xi + \int_K D_2 v(q.\xi)d\xi - \int_{K'} D_2 v(q.\xi)d\xi\right|$$

$$=\left|-\frac{\omega_n \cos(E,E')}{n} + \frac{\omega_n \cos(E,E')}{n} + 0 - \int_{K'} D_2 v(q.\xi)d\xi\right|$$

$$=\left|\int_K D_2 v(q.\xi)d\xi\right|$$

$D_2 v(q.\xi)$ガ ξ ノ函数トシテハK内デ *harmonic*デ $\overline{K'}<K$ ナル事ニ注目スレバ 平均性ニヨリ.

$$\int_{K'} D_2 v(q\,\xi)d\xi = \frac{\omega_n}{n}|p-q|^n \cdot D_2 v(q,X)$$

故ニ $X \neq x_0$ ナラバ

$$\left|\int_{K-K'} D_2 K(q.\xi)d\xi\right| = \frac{\omega_n|p-q|^n}{n}\left|D_i v(q.X)\right|$$

$$\leq \frac{\omega_n|p-q|^n}{n}\left(\frac{R}{|X-x_0|}\right)^{n-2}\frac{n+1}{|q-X|^n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\omega_n\frac{|p-q|^n}{|q-X|^n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\omega_n 2^n$$

$X=x_0$ ナラバ $D_2 v(q.X)=0$デアルカラ 上ノ結果ハ $X=x_0$ デアッテモ通用スル.

ソコデ 一応 $\overline{K'}<K$ナラバ

$$\left|D_2 u(p)-D_2 u(q)\right| \leq \left\{\frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2+5n)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{2}{1+\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)2^n\right\} H_\alpha(f)\,|p-q|^\alpha$$

ニアル事ヲ認識シテ置イテ 一般ノ場合(即チ必ズシモ、$\overline{K'}<K$デナイ場合)モ結局ハ上ノ場合ニ帰着出来ル事ヲ示ス事ニシマス.

$p,q \in K$ガ任意ニ與ヘラレタトキ, 先ヅ線分 $\overline{px_0}$. $\overline{qx_0}$ 上ニソレゾレ点 p_0, q_0 ヲ取ッテ

$$\left.\begin{array}{l}|p-p_0|\\|p_0-q_0|\\|q-q_0|\end{array}\right\}\leqq|p-q|$$

且ツ p_0, q_0 ニ對シテハ前ノ結果ガ適用出來ル樣ニスル。此樣ナ p_0, q_0 ノ取レル事ハ次ニ確メラレル．即チ

1) $|p-x_0|$, $|q-x_0|$ 共ニ $\leqq|p-q|$ ナルトキハ p_0, q_0 トシテドチラモ x_0 自身ヲ取ル

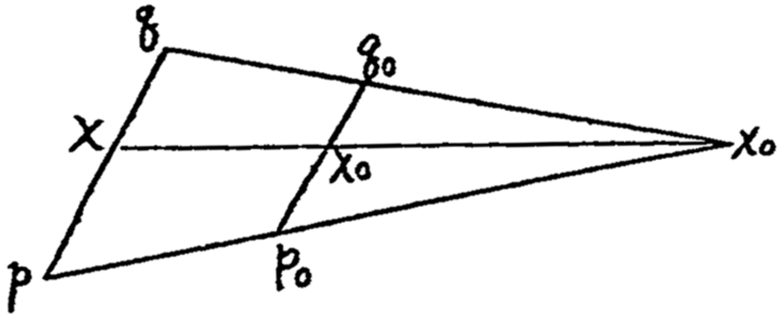
2) 其他ノ場合ハ假ニ $|p-x_0|\geqq|q-x_0|$ トスル（サウシテモ一般性ハ失ハレナイ）。其時 $|p-x_0|>|p-q|$

故ニ，p_0 ヲ線分 $\overline{px_0}$ 上ニ $|p-p_0|=|p-q|$ ナル如ク取ル．

q_0 ハ線分 $\overline{qx_0}$ 上ニ

$$|q-q_0|/|p-p_0|=|q-x_0|/|p-x_0|$$

ナル如ク取ル（即チ △ pqx_0 ノ平面ニ於テ $\overline{pq}$ ト $\overline{p_0q_0}$ トガ平行ナル如ク取ル．



$$|p-p_0|=|p-q| \qquad |p_0-q_0|=|p-q|$$

$$|q-q_0|\leqq|p-q|$$

デアルカラ，p_0, q_0 ニ對シテ前ノ結果ノ適用出來ル事ヲ示セバヨイ。p_0, q_0 ノ中点ヲ X_0 トスレバ，X, X_0, x_0 ハ一直線上ニアッテ

$$|x_0-X_0|+|p_0-q_0|=|x_0-p_0|+|p_0-p|=|x_0-p|<R$$

デアルカラ，X_0 ヲ中心トスル半徑 $|p_0-q_0|$ ノ球ハ 其境界モ共ニ K 内ニアル．即チ p_0, q_0 ニツイテハ前ノ結果ガ適用出來ル．

上ノ樣ニ p_0, q_0 ヲ定メタナラバ，ソレゾレ線分 $\overline{pp_0}$, $\overline{qq_0}$ 上ニ点列

$$p_1,\ p_2, \cdots\cdots, \qquad q_1,\ q_2, \cdots\cdots$$

ヲ

$$\left.\begin{aligned}|p-p_m| &= \frac{1}{2^m}|p-p_0| \\ |q-q_m| &= \frac{1}{2^m}|q-q_0|\end{aligned}\right\}, \quad m=1,2, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル如ク取ル．p_m, q_m ハ m ガ増セバ限リナク p, q ニ近ヅク。

コレラノ点列ノ相隣ル二点

$$p_{m-1},\ p_m, \quad m=1,2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{及ビ}$$

$$q_{m-1},\ q_m, \quad m=1,2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ニ對シテハ スベテ前ノ結果ノ適用出来ル事明白デアル．

前ノ結果ニヨレバ $D_2u(x)$ ハKニ於テ連ゾクデアルカラ．任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ，

$$\left.\begin{aligned}|D_2u(p)-D_2u(p_m)| \\ |D_2u(q)-D_2u(q_m)|\end{aligned}\right\} < \varepsilon$$

ナル如キ m ガ存在スル．其時，

$$\begin{aligned}|D_2u(p)-D_2u(q)| &= |D_2u(p)-D_2u(p_m)| + \sum_{i=1}^{m}|D_2u(p_i)-D_2u(p_{i-1})| + \\ &\quad + |D_2u(p_0)-D_2u(q_0)| + \sum_{i=1}^{m}|D_2u(q_{i-1})-D_2u(q_0)| + \\ &\quad + |D_2u(q_m)-D_2u(q)| \\ &< 2\varepsilon + CH_\alpha(f)\left\{\sum_{i=1}^{m}|p_i-p_{i-1}|^\alpha + |p_0-q_0|^\alpha + \sum_{j=1}^{m}|q_{i-1}-q_i|^\alpha\right\} \\ &= 2\varepsilon + CH_\alpha(f)\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{|p-p_0|}{2^i}\right)^\alpha + |p_0-q_0|^\alpha + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{|q-q_0|}{2^i}\right)^\alpha\right\} \\ &\leq 2\varepsilon + CH_\alpha(f)\,|p-q|^\alpha\left(1+2\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^i\right)\end{aligned}$$

但シ

$$C = \frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2+5n)\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha}\right) + \\ + \frac{1}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)2^n$$

デアル。

$$1+2\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^i \leq \frac{2}{1-\frac{1}{2^\alpha}}-1=\frac{2^\alpha+1}{2^\alpha-1}$$

デアルカラ

$$\left|D_2u(p)-D_2u(q)\right|<2\varepsilon+\frac{2^\alpha+1}{2^\alpha-1}CH_\alpha(f)\left|p-q\right|^\alpha$$

$\varepsilon>0$ ハ任意デアルカラ $\left|D_2u(p)-D_2u(q)\right|=\frac{2^\alpha+1}{2^\alpha-1}CH_\alpha(f)\left|p-q\right|^\alpha$
即チ D_2u ハ K ニ於テ α-*Hölderienne* デアッテ.

$$H_\alpha(D_2u)\leq\frac{2^\alpha+1}{2^\alpha-1}CH_\alpha(f)$$

Q. E. D

§5. Reference ノ結語及ビ補ヒ

自分ガ参照シタ論文ノ主ナルモノハ：—

1) 福原満洲雄氏： ポテンシヤル論ニ関スル Müntz ノ定理
("函数方程式" 5, 6 (昭和14年))

2) H. Müntz : *Zum Randwertproblem der partillen Differentialgleichungen der Minimalfächen*
(Crelle J. 139 (1911), p52~77)

3) A. Korn : *Sur les equations de Elastiicité* (*Annales de l'École norm sup*, (3), 1907 p 1-75
特ニ p.27-42).

Müntz ハ2次元デ *Korn* ハ3次元デヤッテアル. 上ノ *Korn* ノ論文ハ結局 *green*. ノ函数ノ代リニ *elementary solution* ノ入ッタ

$$\overline{u}^i(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_G \gamma(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

ニツイテ

$$H_\alpha(D_2\overline{u})=KH_\alpha(f)+K'\|f\|$$

ノ如キ関係ヲ出シテアル. G ハ境界ガ相当素直ナ有界領域デアル.

上掲(4)ノ証明(§4)ニ於テ. [1] [1'], [2], [2'] ノ評価ノ仕方ハ此ノ Korn ノ論文ニアル方法ヲ模倣シタモノデアリマス.

[3]ノ評価ノ仕方ハ Korn トハ独立ニ我々ガ試ミタモノデアリマス.

J. Schauder ニ從フト, 1907 年ノ A. Korn ノ論文以來多クノ人ニヨッテ Müntz 型ノ定理ノ証明ガナサレテアルラシク. 実際 Encyklopädie der math. Wissen. Bd. II 3. Heft 3 (Lichtenstein) p. 286-287 ヲ見ルト:—

領域 G ガ Bh-class ニ属シ (有界トスル), $f(\xi)$ ガ G ニ於ケテ α-Hölderienne $(0<\alpha<1)$ ナルトキ, $G(x,\xi)$ ヲ G ニ対スル Green ノ函数トスレバ,

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_G G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

ニツキ D_2u ガヌ α-Hölderienne デ,

$$H_\alpha(D_2\hat{u})\leq A_1\|f\|+A_2H_\alpha(f),\quad A_1>0,\quad A_2>0$$

ナル関係成立ッ事ガ書カレテアリ. 之ニ関シテハ, 上揭 Müntz ノ論文ノ外ニ

4) A. Korn, Uber Minimalflachen, deren Rand-Kurven wenig von ebenen Kurven abweichen. (Ber. Abhandlung. 1909. Anhangs p1-37.)

ヲ見ル様ニト指示シテアリマスガ, 残念ナ事ニハ当理学部ノ図書室ニハ此 Abhandlung ノ丁度此年ノアタリガ缺ケテ居テ見ル事ガ出來マセン. トユカオ持合セノ処デ足ラレルナラバ, 何カ参考ニナル事ガアルト考ヘマス.

此本カニ Schauder ノ言フ様ナドノ様ナ論文ガアルノカ現在未ダ知リマセン.

終リニ臨ミ, 南雲教授ヨリ多クノ有益ナル御忠告ヲ受ケマシタ事ニ對シ厚ク感謝ノ意ヲ表シマス.